

Doktori értekezés

GÖMBHÉJAK ÉS HÉJRENDSZEREK
DINAMIKÁJA ÉS ALKALMAZÁSUK
AZ ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLETBEN

írta

GÁSPÁR MERSE ELŐD

témavezető

RÁCZ ISTVÁN



Budapest

2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
2. Héjak dinamikája	13
2.1. Általános illesztési egyenletek	13
2.2. Gömbszimmetrikus téridők illesztése	18
2.3. Vákuumban mozgó gömbhéj	21
2.4. Radiális megmaradási egyenlet	27
2.5. Állapotegyenlet	28
2.5.1. Homogén lineáris állapotegyenlet	29
2.5.2. Törött lineáris állapotegyenlet	29
2.5.3. Politróp állapotegyenlet	30
2.6. Kezdő adatok	31
2.7. Eddington–Finkelstein koordináták	33
2.8. Porból álló héj mozgása	33
2.9. Egyensúlyi állapot	35
2.10. Newtoni mozgásegyenlet	37
2.11. Összefoglalás	38
3. Héjak ütközése	41
3.1. Transzparens áthatolás	41
3.2. Teljesen rugalmatlan ütközés	46
3.3. Összefoglalás	49
4. Héjrendszerek vizsgálata	51
4.1. Két héj mozgása	51
4.2. Kezdő adatok	51
4.3. Numerikus algoritmus	52
4.4. Szimulációk	53
4.4.1. Bevezető példa	54
4.4.2. Kicsi perturbációk	59
4.4.3. Vastag héjak diszperziója	61
4.4.4. Tömeg infláció	63
4.5. Összefoglalás	65
5. Gravastar	69
5.1. Alternatív fekete lyukak	69
5.2. Gravastar héjmodell	72

5.2.1.	Dinamikai egyenletek	72
5.2.2.	Egyensúlyi helyzetek	73
5.2.3.	Stabilitás	75
5.3.	Gravastar és porfelhő	81
5.3.1.	Ütközés	82
5.3.2.	Kialakuló új gravastar	83
5.3.3.	Alkalmazott algoritmusok	84
5.4.	Numerikus eredmények	84
5.4.1.	Homogén lineáris eset	85
5.4.2.	Törött lineáris eset	89
5.4.3.	Politróp eset	90
5.5.	Buchdahl-típusú korlátok	90
5.6.	Összefoglalás	92
	Kitekintés	93
	Angol nyelvű összefoglaló	95
	Függelék	97
A.	Gauss–Codazzi egyenletek és alkalmazásuk	97
B.	Külső görbület komponensei gömbszimmetria esetén	99
C.	\dot{T} képletének levezetése, avagy az ϵ_t előjel rögzítése	100
D.	Virializált réteges gömbhéj modell	102
	Irodalomjegyzék	105

1. Bevezetés

A doktori értekezés címében szereplő gömbhéj alatt lényegében két különböző fogalmat érthetünk. Egyrészt beszélhetünk gömbfelületről, mint határfelületről, amely két szomszédos tartomány (többnyire egy belső és egy külső) határán helyezkedik el. Ilyen értelemben a gömbfelület nem anyagi entitás, csak egy matematikai fogalom, azonban időben és térben meghatározható a mozgása. Másrészt beszélhetünk gömbfelületen eloszló anyagi entitásról is, amit infinitezimálisan vékony gömbhéjnak nevezünk, és elméleti modellként tekintünk rá. Mindkét eset hasonló módon tárgyalható, értekezésünk témája azonban az utóbbira koncentrál. Más szempöngből nézve az ismertetésre kerülő formalizmus alkalmas arra, hogy külféle gömbszimmetrikus téridők összeillesztésével új egzakt megoldásokat konstruáljunk. Egy Minkowski-féle sík téridőt összeilleszthetünk például egy külső Schwarzschild vákuum téridővel (ponttömeg tere), Reissner–Nordström elektrovákuummal (ponttöltés tere) vagy Vaidya téridővel (gömbszimmetrikus sugárzás), és az így kapott megoldásokat rendre tömeges, töltött, ill. sugárzó héjként interpretálhatjuk. Az egzakt megoldásoknak különösen fontos szerepe van az általános relativitáselméletben, mert egy erősen nemlineáris 4-dimenziós elméletről van szó, amelyben a numerikus számolások rendkívül erőforrás igényesek. Sok probléma esetében azonban egy ilyen egyszerűsített héjmodell is választ adhat fontos kérdésekre. A lehetséges alkalmazások száma meglehetősen széleskörű. Gömbhéjak alkalmazását megtaláljuk a részecske modellektől kezdve az asztrofizikai rendszereken át egészen az Univerzumot leíró modellekig, amelyekről az alábbi lista nyújt rövid összefoglalást.

Elektron modellek

Az elektront számos módon próbálták már modellezni. Manapság a kvantum mechanikai leírást használjuk, amely elhanyagolja a gravitációs effektusokat. Az általános relativitáselmélet szerint azonban az elektron tömegét az energiája adja, és figyelembe véve az elektron sugárára a kísérletekből kapott $\sim 10^{-16}$ cm felső korlátot, kiderül, hogy a töltésnek megfelelő energiát valamely tartományon negatív gravitációs tömegnek kellene kompenzálnia [1, 2, 3, 4]. Természetesen kívülről nézve a teljes tömeg pozitív, a negatív tömegű tartomány azonban kompatibilitási problémákat okoz az általános relativitáselmélet energiafeltételeivel és a szingularitás tételekkel. A kvantumgravitáció elméletének hiányában a megoldás még várat magára, azonban ezt a problémát ki lehet kerülni például egy olyan modellel, amelyben a töltés egy gömbhéjon oszlik el [5, 6, 7].

Szemi-klasszikus kvantálás

A gömbhéj modellnek nagy előnye a folytonos eloszlású modellekkel szemben, hogy a dinamikája lényegében leírható egy effektív radiális potenciállal, hiszen a gömbszimmetria és az infinitezimális vastagság miatt a feladat 1-dimenziós problémává redukálódik. Egy ilyen rendszer az effektív potenciál segítségével szinte automatikusan kvantálható [8]. Ilyen szemi-klasszikus kvantálással vizsgálható az előzőekben említett elektron modell is [6], de alapvetően fontos eredmények adódnak porhéj gravitációs összeomlásának esetében a centrális szingularitással kapcsolatban. Kiderül ugyanis, hogy a kvantált gömbhéj megtalálási valószínűsége nem koncentrálódik a centrumba, annak ellenére, hogy klasszikusan összeomolna a rendszer [9]. Gravitációs rendszerek szemi-klasszikus kvantálása természetesen közelebb vihet minket a kvantum-gravitáció megértéséhez is.

Kvark-gluon anyag

Manapság a legnagyobb kísérletek egyike a kvark-gluon plazma keresése gyorsítóknak. Az anyagnak ez a halmazállapota elképzeléseink szerint a természetben két helyen fordulhat elő, a korai Univerzumban és a feltételezett kvark-csillagokban. Ez utóbbiak a neutroncsillagoknál is sűrűbb égi objektumok, amelyek lényegében egy nagy hadronnak tekinthetők. Világos, hogy az ilyen rendszerek vizsgálatában a gravitáció nem elhanyagolható. A hadronok leírására szolgáló zsákmodell [10, 11] kombinálva a relativisztikus héj formalizmussal alkalmas arra, hogy megvizsgáljuk egy ilyen makroszkopikus kvark-gluon anyag stabilitását [12].

Szupernóva robbanás

A szupernóva robbanás az Univerzum egyik leglátványosabb jelensége, melyben egy csillag egyik percéről a másikra fényesebbé válhat, mint egy egész galaxis, ráadásul a sugárzás csak kis része a felszabaduló energiának. A jelenség elméleti tárgyalása azonban bonyolult, numerikus szimulációt igényel, és a fizika számos területének eredményeire támaszkodik. Bizonyos rész folyamatok és effektusok megértésében, vagy a mérési eredmények kiértékelésében azonban sokszor segíthet egy végletekig leegyszerűsített héjmodell is [13, 14].

Egzotikus csillagmodellek

Különbéle gömbszimmetrikus téridők összeillesztésével olyan egzotikus modelleket is konstruálhatunk mint a gravastar. A gravastar egy hipotetikus csillagmodell amelyet azért konstruáltak, hogy a fekete lyuk alternatívája legyen. A gravastar centrumában a téridő de Sitter-szerű, amely a szokásos külső Schwarzschild vákuumhoz oly módon kapcsolódik, hogy a konstrukció elkerüli az eseményhorizont kialakulását. Dolgozatunk külön fejezetben foglalkozik a gravastar modellel, ezért a téma bővebb kifejtését ott találjuk.

Szingularitások vizsgálata

Gravitációs kollapszus során alapvetően kétféle szingularitás alakulhat ki. Az egyik a központi szingularitás, amelybe beleomlik az anyag, a másik pedig az ún. akusztikus szingularitás¹ [15, 16] amikor a szomszédos rétegek összetorlódznak és keresztezik egymást. Ez az utóbbi jelenség folytonos modellekben is előfordul [17]. Az első egy sokkal erősebb jellegű szingularitás, amikor a szingularitásban végződnek a világvonalak, azaz tovább nem folytathatók. Az akusztikus szingularitás esetében bizonyos feltételek mellett folytathatók a világvonalak. Mindkét fajta szingularitás dinamikája jól tanulmányozható héjak segítségével. Megvizsgálható például, hogy milyen effektus kell ahhoz, hogy megálljon a kollapszus [18]. Kiderül, hogy a kvantummechanikai Casimir effektus például megállítja [19]. Az akusztikus szingularitás vizsgálatában a héjak szintúgy alkalmazhatók, nagyon természetes módon, és ehhez a témához a disszertációban található új eredmények egy része szintén hozzátesz majd.

Fekete lyukak vizsgálata

A tudomány egyik legnagyobb áttörése a kvantumgravitáció elmélete lehetne, amely a kvantummechanikát és az általános relativitáselméletet koherensen ötvözné egybe. A klasszikus általános relativitáselmélet érvényességi határa a Plank-skála, azonban ez nem jelenti azt, hogy csak Plank-skála méretű objektumok esetén szenved csorbát az elmélet alkalmazhatósága. Jól ismert, hogy tetszőleges méretű fekete lyukak eseményhorizontja közelében már inkonzisztenciák lépnek fel a kvantummechanikával, lásd például: információ paradoxon. Ezért különösen fontos az esemény horizonthoz kapcsolódó effektusok vizsgálata,

¹Angolul a shell-crossing elnevezés használatos a legtöbb helyen.

mint például a Hawking-sugárzás, még akkor is, ha azok egyelőre csak szemi-klasszikus elméletekkel írhatók le. A fekete lyuk belső struktúrájának és végállapotának megértéséhez (amely utóbbi kapcsolódik az előző pontban említett központi szingularitáshoz) ugyancsak elengedhetetlenül szükséges egy Plank-skálán érvényes elmélet. A héj formalizmus ezeken a területeken is lehetőséget ad fontos vizsgálatokra és megállapításokra [20, 21, 22, 23, 24, 25].

Kritikus kollapszus

A kritikus kollapszus egy fázisátalakuláshoz nagyon hasonló jelenség az általános relativitáselmélet kezdő adatainak terében. Röviden összefoglalva skála-invariancia mutatkozik a dinamikában a kezdő adatok terében lévő azon felületnek a közelében, amely elválasztja egymástól a fekete lyuk végállapotra vezető adatokat, a diszperzálódó végállapotra vezető adatoktól. A skála-invariancia következménye továbbá, hogy a kialakuló fekete lyuk tömege hatványfüggvény szerinti viselkedést mutat az említett felület közelében. A kritikus kollapszus jelensége többnyire csak numerikusan vizsgálható, és a fenti viselkedés igazolásához sok rendszer szimulációjára van szükség. Ahhoz hogy egyetlen vékony héjjal vizsgáljuk a kritikus kollapszus jelenségét, olyan héjra van szükségünk, amely energiát sugároz, mert egyébként a kialakuló fekete lyuk tömege mindenképpen a héj teljes tömege lenne. Sugárzó héjak a Vaidya megoldás segítségével írhatók fel [26, 27, 28], és kiderül hogy ez a nagyon egyszerű modell is mutatja a kritikus jelenséget [29], ráadásul analitikusan számolható, ami jelentős eredmény, hiszen ezáltal jobban megérthetjük az effektus természetét.

Féreglyukak

A féreglyukak olyan nem triviális topológiájú megoldásai az Einstein-egyenleteknek, amelyek átjárást biztosítanak az Univerzum két távoli aszimptotikusan sík tartománya között. A megvalósításához egzotikus anyagra van szükség, ugyanakkor egyes modellekben a kvantum fluktuációk miatt a Plank-skálán spontán módon folyamatosan létrejönnek és eltűnnek mini féreglyukak. A féreglyukak legegyszerűbben infinitezimális héjakkal modellezhetők, és ez úgy érhető el, hogy a héj mindkét oldalára külső téridőt helyezünk. Egy ilyen modellben az egzotikus anyag a héjra koncentrálódik. Az egyik fő kérdés ezekkel a hipotetikus objektumokkal kapcsolatban a stabilitás [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37].

Nagyskálás buborékok

Az Univerzum feltérképezésére szolgáló jelenlegi nagy skálás mérések a nem olyan régen még szinte csak filozofikus kérdéseket tárgyaló kozmológiát precíziós kísérleti tudománnyá alakították. A mérési adatok alapján a galaxisok eloszlása filamentumok mentén sűrűsödik és nagy kiterjedésű ritka tartományok fordulnak elő benne. A nagy skálás dinamika vizsgálata N-test szimulációval rendkívül erőforrás igényes, még abban az esetben is, ha egy galaxist egyetlen tömegpontként kezelünk. A ritka tartományok dinamikája azonban egy egyszerűsített héjmodell segítségével is megvizsgálható. Természetesen a vizsgált tartományok nagy mérete miatt a héjakat kozmológiai modellekbe kell beépíteni, mint például a Friedmann–Robertson–Walker téridő [38, 39, 40].

Buborék inflációs modellek

Az ősrobbanás standard modelljének ismert problémáit magyarázó infláció fellépte ma már általánosan elfogadott. Létrejöttének az okára és módjára azonban rengeteg különböző modell létezik, amelyek között szerepelnek a buborék inflációs modellek is [41, 42, 43, 44, 45, 46, 47]. Ezek szerint a látható Univerzum nem más, mint egy fázisátalakulás során kialakuló expandáló buborék, amely a folyamat kezdetén jól közelíthető egy gömbbel.

Brán kozmológiák

A brán-elméletek szerint az Univerzumunk nem más mint egy magasabb dimenziós téridőben lévő 4-dimenziós felület [48]. A gömbhéjak dinamikájának magasabb dimenzióra általánosított egyenletei tehát alkalmasak egy ilyen izotróp Univerzum fejlődésének leírására [49, 50, 51]. A brán-elméletek előnye, hogy természetes megoldást kínálnak több ismert problémára, mint például a hierarchia-problémára, hogy miért olyan gyenge kölcsönhatás a gravitáció, illetve a sötét energiára, amely a jelenlegi kozmológiai mérések szerint az Univerzum tömegének 70%-át adja, azonban létezésére és természetére nincs elfogadott fizikai magyarázatunk. A brán-elméletekben nincs szükség sötét energiára, ugyanis annak hatását a magasabb dimenzió görbültsége magyarázhatja.

A fentiekben felsorolt különböző rendszerek dinamikája lényegében ugyanazokkal az egyenletekkel írható le. Annak ellenére azonban, hogy gömbhéjak számos területen alkalmazhatók, és bonyolult folytonos problémákat is közelíthetünk diszkrét héjakkal, nagyon kevés munka irányult eddig

kettőnél több héjat tartalmazó rendszerek vizsgálatára. Ugyancsak kevesen tárgyalták eddig a mozgás teljes leírását, beleértve héjak ütközése esetén a folytatást, illetve az eseményhorizonton való átmenetet. Ezidáig a héjakkal foglalkozó tanulmányok leginkább az analitikus leírásra korlátozódtak a leg-egyszerűbb állapotegyenleteket feltételezve.

A doktori munkám jelentős része egy olyan C++ nyelven íródott gyors software kifejlesztése volt, mellyel tetszőleges számú koncentrikus gömbhéj mozgása numerikusan szimulálható a héjak közötti esetleges ütközések vagy áthatolások figyelembe vételével. A héjakat alkotó anyag állapotegyenlete héjról-héjra tetszőlegesen választható. A software forráskódja ingyenesen elérhető². A fent felsorolt példák mutatják, hogy milyen sok területen alkalmazható ez a programcsomag.

A doktori értekezésben összefoglaljuk az elméleti hátteret, és rugalmatlan ütközések terén néhány új analitikus eredményt is levezetünk. Egy speciális alkalmazásként külön fejezetet szentelünk a garvastarok analitikus és numerikus vizsgálatára. Ez utóbbi téma motivációjáról a gravastarról szóló fejezet bevezetőjében bővebben értekezünk, előljáróban csak annyit, hogy az Unverzumban jelenleg mérhető gyorsulva tágulás és a sötét energia koncepciója miatt az alternatív fekete lyuk megoldások között a gravastar mostanában a figyelem középpontjába került. Ez az a téma, amellyel eredetileg elkezdtem a vizsgálódásaimat téridők illesztésével kapcsolatban.

A dolgozat felépítése

A 2. fejezetben összefoglaljuk infinitezimális héjak dinamikájának leírását, azon belül külön tárgyaljuk a gömbszimmetrikus esetet, és kitérünk az Eddington–Finkelstein koordinátákban való leírásra is, amelynek segítségével a mozgás a horizonton keresztül is folytatható. A 3. fejezetben héjak ütközésének két speciális esetét, a transzparens áthatolást és a teljesen rugalmatlan ütközést vizsgáljuk. A 4. fejezetben megmutatjuk, hogyan célszerű leírni héjak együttes rendszerét, és számos numerikus szimulációval vizsgáljuk az akusztikus szingularitás és a tömeg infláció jelenségét. Végül az utolsó 5. fejezetben speciális alkalmazásként összefoglaljuk a gravastar egy egyszerűsített, de jól tanulmányozható modelljét, és ennek vizsgáljuk a stabilitását egy új módszerrel.

²Letölthető az alábbi helyről:

<http://\sss.rmki.kfki.hu>

Használt konvenciók

A dolgozatban végig a $(- + + +)$ szignatúra konvenciót használjuk, és $G = c = 1$ geometriai rendszerben dolgozunk, ahol G a gravitációs állandó, c pedig a fénysebesség. Ahol másképp nem rendelkezünk, ott az absztrakt index konvenciót alkalmazzuk (lásd például [52]), vagyis a latin indexeket a kovariáns mennyiségek jelölésre használjuk, a görög indexek pedig a téridőn definiált 4-dimenziós mennyiségek komponenseit indexelik adott bázison.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni témavezetőmnek, Rácz Istvánnak, az érdekes téma felvetésért, a támogatásért és a sok-sok konzultációért, amelyek előre mozdították a munkámat. Köszönet az RMKI intézetének és vezetőinek a lehetőségért, hogy fiatal kutatóként itt végezhettem a doktori munkámat, és köszönet az elméleti főosztály teljes közösségének, különösen azoknak, akikkel folytatott kisebb-nagyobb szakmai beszélgetések inspiráltak a munkám során. Továbbá köszönetemet szeretném kifejezni Fodor Gyulának, aki lelkiismeretes módon lektorálta és számos javaslatával pontosította dolgozatomat a véglegesítés előtt. Legfőképpen pedig köszönetemet szeretném kifejezni családomnak és szeretteimnek, akik türelemmel viseltettek irántam az elmúlt években.

2. Héjak dinamikája

Ebben a fejezetben összefoglaljuk az általános relativitáselmélet keretein belül a szakadási felületek esetében alkalmazható illesztési egyenleteket. Két féle szakadási felületet szokás megkülönböztetni az alábbiak szerint. Abban az esetben, amikor a sűrűségnek véges ugrása van, szimplán határfelületről beszélünk, ez a helyzet például egy lökéshullám esetén. Amikor pedig a sűrűség végtelenné válik, infinitezimálisan vékony héjról beszélünk, amely véges felületi energiasűrűséggel rendelkezik. Ez utóbbi eset infinitezimalitása miatt természetesen egy idealisztikus határesetet, amely a valóságban precízen véve nem létezik, mégis egy nagyon jól alkalmazható modell, és ez utóbbi esetet fogjuk részletesebben tárgyalni a dolgozatban.

Először tetszőleges időszerű határfelületek és infinitezimálisan vékony időszerű héjak dinamikáját leíró egyenleteket tárgyaljuk, majd részletesen kitérünk a gömbszimmetrikus esetre, azon belül is külön vizsgáljuk a vákuumban mozgó héjat, amikor a héj mindkét oldalán vákuum téridők helyezkednek el. Figyelmet fordítunk arra is, hogy a dinamikai leírás a horizonton átmenve folytatható legyen, ezért a Schwarzschild koordináták mellett az Eddington–Finkelstein koordinátákban való leírásra is kitérünk, melynek nincs koordináta szingularitása a horizonton. Megmutatjuk továbbá, hogy a héj anyagát alkotó anyag állapotegyenletétől hogyan függ a héj dinamikája, vizsgáljuk a leggyakoribb állapotegyenleteket, és külön összefoglaljuk a por héj lehetséges mozgástípusait. Jellemezzük az egyensúlyi állapotokat és a fejezet végén megadjuk a newtoni közelítésben érvényes egyenleteket is.

2.1. Általános illesztési egyenletek

Az alábbiakban az Israel-féle illesztési feltételeket foglaljuk össze [53], amelyek szorosan kapcsolódnak Lánczos [55, 56], Sen [54], Darmois [57], O’Brien és Synge [58], Lichnerowicz [59], Taub [60] és Dautcourt [61] korábbi eredményeihez. Az eredeti módszer a Gauss–Codazzi formalizmus segítségével illeszti a metrikát [53, 64, 65, 62, 63, 66, 67, 68], illetve töltött héjra általánosítva [69, 70, 71], ezt követjük mi is, azonban megjegyezzük, hogy ezek az eredmények több különböző módszerrel is levezethetők, többek között disztribúciók használatával [72, 73, 74, 75], vagy variációs ill. Hamilton formalizmussal [76, 77, 78, 79, 80, 81], vastag héjból való határátmenetet képezve [82, 83] illetve folytonos koordináták bevezetésével [84].

Célunk szakadási felületek illesztési egyenleteinek tárgyalása. Az általános relativitáselmélet keretein belül azonban mindig téridő-sokaságokról kell értekeznünk, ezért úgy járunk el, hogy kettő peremes téridő-sokaság egymáshoz való illesztésének feltételeit vizsgáljuk. Megjegyezzük, hogy fizikus

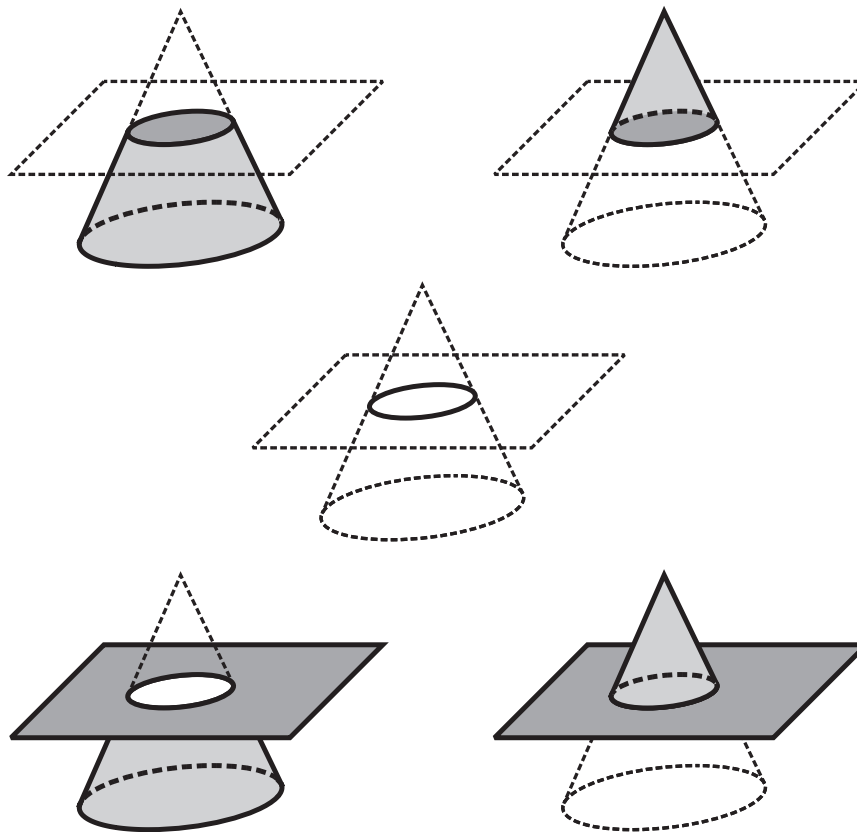
szempontból kicsit furcsa az a megközelítés, hogy rögzítjük a téridőket, és az illesztés feltételei által korlátozásokat írunk elő az illesztési felületen lévő anyagra. Azonban ez csak interpretáció kérdése, a kapott illesztési feltételekre fordítva is tekinthetünk, vagyis megadhatunk egy adott tulajdonságú héjat kezdő adatként is, és ebben az esetben az illesztési feltételek előírják, hogy az milyen téridőben mozoghat, azaz milyen téridőt alakít ki maga körül. Nézzük hogyan vizsgálható mindez precízen a sokaságok nyelvén.

Tegyük fel, hogy adott kettő peremes sokaságunk amelyeket össze akarunk illeszteni. Ezeket a peremes sokaságokat általában perem nélküli teljes téridőkből vágjuk ki, azonban az illesztés szempontjából teljesen irreleváns, hogy honnan származtatjuk őket. A könnyebb tárgyalhatóság kedvéért azonban feltesszük, hogy ismertek az eredeti téridő-sokaságok.

Legyen \mathcal{M}^+ és \mathcal{M}^- kettő négydimenziós Lorentz-szignaturájú téridő-sokaság. Mindkét téridőben legyen adva egy 3-dimenziós időszerű hiperfelület, rendre Σ^+ és Σ^- , melyek osszák a téridőket két különálló (peremes) részre. Követeljük meg továbbá, hogy a két hiperfelület egymással izomorf legyen. Az \mathcal{M}^+ téridő Σ^+ által elhatárolt két felére használjuk az \mathcal{M}_1^+ és \mathcal{M}_2^+ jelöléseket. Az \mathcal{M}^- téridő Σ^- által elhatárolt két felére pedig az \mathcal{M}_1^- és \mathcal{M}_2^- jelöléseket. Az alábbiakban részletezett illesztési formalizmus egy olyan új téridő-sokaságot hívatott konstruálni, amely az \mathcal{M}^+ téridő valamelyik felét az \mathcal{M}^- téridő valamelyik felével illeszti össze úgy, hogy egymással azonosítja a Σ^+ és Σ^- hiperfelületeket az izometria által. Általános esetben összesen négy kombináció lehetséges: $\mathcal{M}_1^+ \cup \mathcal{M}_1^-$, $\mathcal{M}_1^+ \cup \mathcal{M}_2^-$, $\mathcal{M}_2^+ \cup \mathcal{M}_1^-$, $\mathcal{M}_2^+ \cup \mathcal{M}_2^-$. Ezt illusztrálja az 1. ábra négydimenziós sokaságok helyett kétdimenziós felületek összeillesztése esetén. Ha az egyik téridő a Σ hiperfelületre Z_2 -szimmetrikus (tükörszimmetrius), akkor az egymással nem ekvivalens illesztési lehetőségek száma feleződik, hiszen nem releváns, hogy a Z_2 -szimmetrikus téridő melyik felét választjuk ki. Ha mindkét téridő Z_2 -szimmetrikus, akkor csak egyetlen lehetőség marad. Abban az esetben pedig, ha az \mathcal{M}^+ és \mathcal{M}^- téridők izomorfak egymással, de Z_2 -szimmetria nem áll fent, akkor három lehetőség van az illesztésre.

Az alábbiakban a Σ^\pm hiperfelületek jellemzését adjuk az \mathcal{M}^\pm téridőkben. Mivel az egyenletek teljesen azonosak a két téridőben, ezért a könnyebb olvashatóság kedvéért elhagyjuk a téridőkre vonatkozó \pm indexeket. Továbbá minden esetben komponensekre vonatkozó egyenletekkel operálunk rögzített koordinátarendszer felett, ezért a szokásos absztrakt index konvenció helyett ebben az alfejezetben a latin indexeket nem a kovariáns mennyiségek jelölésre használjuk, hanem a Σ hiperfelületen definiált háromdimenziós mennyiségek komponenseinek indexelésére, míg a görög indexek szokásos módon a téridőn definiált négydimenziós mennyiségek komponenseit indexelik.

Legyen x^α a négydimenziós téridőnek a Σ hiperfelület környezetében érvé-



1. ábra. *Illusztráció felületek összeillesztésére.* Egy kúp és egy sík (középen) összeillesztése egy azonos sugarú kör mentén négyféleképpen tehető meg (négy sarok). Ugyanennyi a lehetőségek száma általános esetben téridők hiperfelületek mentén történő összeillesztése esetében. Az illusztráció [63] cikkből lett átvéve.

nyes koordinátázása, $g_{\alpha\beta}$ pedig a téridő metrikája ezen a bázison. Vezessünk be továbbá belső koordinátákat a háromdimenziós Σ hiperfelületen, melyeket jelöljünk ξ^a -val, a hiperfelület belső hármass metrikája pedig legyen γ_{ab} . Az ívelemnégyzetnek a Σ hiperfelületen ugyanannak kell lennie akármelyik metrika szerint számoljuk is, ezért a γ_{ab} hármass metrikának a téridő $g_{\alpha\beta}$ metrikájával összefüggésben kell lennie. Ezt az összefüggést a Σ felületen vett $e_{(a)}^\alpha$ természetes bázis segítségével adhatjuk meg.

$$e_{(a)}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^a}. \quad (2.1)$$

Megjegyezzük, hogy a fenti három bázisvektor egyben a Σ hiperfelületre projektáló operátor, vagyis tetszőleges, a szóban forgó hiperfelületbe eső négydimenziós A vektor esetében $A^\alpha = e_{(a)}^\alpha A^a$ és $A_a = e_{(a)}^\alpha A_\alpha$. Az indukált metrika

$$\gamma_{ab} = g_{\alpha\beta} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta. \quad (2.2)$$

Legyen a Σ hiperfelületre, és egyben a bázisvektorokra is merőleges négydimenziós egységvektor n_α . Az n_α normálvektor egy előjel erejéig határozatlan, hiszen az orientációja kétféle képen választható. Időszerű Σ hiperfelületet feltételezve a normálvektor térszerű, azaz $n^\alpha n_\alpha = +1$. Tegyük fel, hogy a Σ hiperfelület az alábbi paraméteres egyenlet által adott.

$$F(x^\alpha) = 0. \quad (2.3)$$

Ekkor a felület n^α egység normálvektora az alábbi módon írható

$$n_\alpha = \pm \left| g^{\beta\gamma} \frac{\partial F}{\partial x^\beta} \frac{\partial F}{\partial x^\gamma} \right|^{-1/2} \frac{\partial F}{\partial x^\alpha}. \quad (2.4)$$

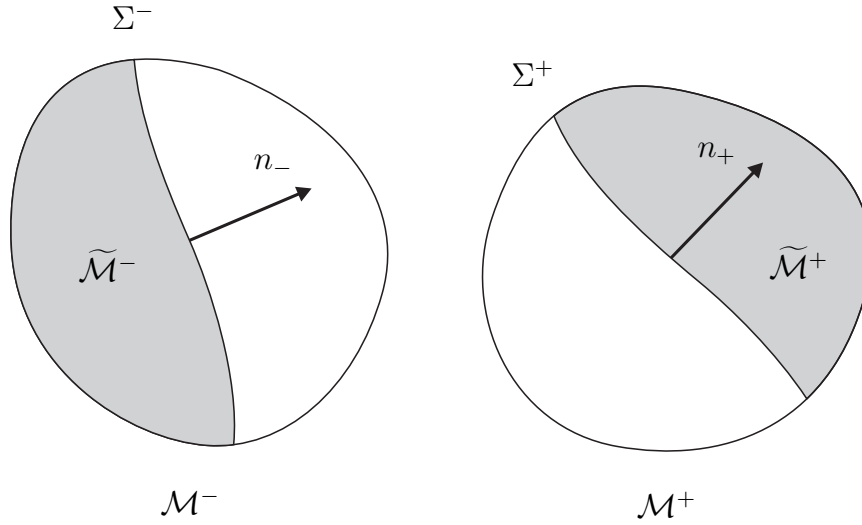
A képletben szereplő előjel a fent említett orientációt határozza meg, ugyanakkor tetszőleges orientáció esetén, az F függvény átdefiniálásával tetszőlegesen rögzíthető az előjel, hiszen F -et az ellentettjére változtatva (2.3) változatlanul teljesül, de $\partial F/\partial x^\alpha$ előjelet vált.

A felület fontos invariáns mennyisége az ún. külső görbület, amely szimmetrikus tenzor, és az alábbi formában adható meg³

$$K_{ab} = e_{(a)}^\nu e_{(b)}^\mu \nabla_\nu n_\mu = -n_\sigma \left(\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \xi^a \partial \xi^b} + \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^b} \right). \quad (2.5)$$

A külső görbület ennek megfelelően ugyancsak orientáció-függő és a normálvektor előjelének megváltoztatása esetén megváltozik az előjele.

³Megjegyezzük, hogy a fenti képlet értelmezéséhez a normálvektort a felület közelére is ki kell terjeszteni, azonban a kiterjesztéstől függetlenül adódik a külső görbület [89, 90].



2. ábra. *Illusztráció téridők összeillesztéséhez.* A szürkével színezett tartományokat ragasztjuk össze. A Σ^+ és Σ^- hiperfelületek izomorfak egymással, és a választott konvenció szerint az n_- és n_+ normál vektorokat úgy irányítjuk, hogy rendre az $\tilde{\mathcal{M}}^-$ tartományból kifelé, az $\tilde{\mathcal{M}}^+$ tartományba pedig befele irányuljanak.

Tárgyaljuk most az illesztési feltételeket. Ehhez rögzítjük, hogy a fent említett négy lehetőség közül melyiket szeretnénk megvalósítani, tehát az \mathcal{M}^- és \mathcal{M}^+ sokaságnak is kiválasztjuk valamelyik felét. A kiválasztott tartományokra ezentúl rendre az $\tilde{\mathcal{M}}^-$ és $\tilde{\mathcal{M}}^+$ jelölésekkel hivatkozunk. Megegyezés szerint a normál vektorokat úgy irányítjuk, hogy azok a kiválasztott $\tilde{\mathcal{M}}^-$ tartományból kifelé és az $\tilde{\mathcal{M}}^+$ tartományba befele irányuljanak, ahogy a (2). ábrán is látható. Így a normál vektor definíció szerint folytonosan megy át a felületen. Megjegyezzük, hogy eme választás ellenére az $\tilde{\mathcal{M}}^-$ és $\tilde{\mathcal{M}}^+$ tartományok közül egyik se kitüntetett, hiszen a sokaságokat fordítva is elnevezhetjük volna.

Tetszőleges X mennyiség ugrását a Σ hiperfelületen jelölje $[X] = X|_+ - X|_-$, ahol $X|_+$ a mennyiségnek az \mathcal{M}^+ téridőben értelmezett és a hiperfelületen vett határértéke, $X|_-$ pedig az \mathcal{M}^- téridőben értelmezett határértéke. Az ívelemnégyszet folytonos átmenetét biztosító feltétel $[\gamma_{ab}] = 0$ alakban írható. Ha emellett teljesül $[K_{ab}] = 0$, akkor szimplán határfelületről beszélünk. Ilyen például egy csillag felszíne, ahol a nyomás zérussá válik. Ha azonban $[K_{ab}] \neq 0$, akkor a görbület ugrását a határfelületen lévő anyagnak kell biztosítania, ekkor beszélünk határkéregről, amit a továbbiakban csak (infinitezimálisan) vékony héjnak nevezünk. Ebben az esetben a héjat alkotó anyagra adódik speciális követelmény. A külső görbület ugrásának az

anyaggal való kapcsolatát az alábbi ún. Lánczos-egyenlet⁴ írja le, melynek levezetése megtalálható például az Israel-féle cikk [53] függelékében.

$$[K_{ab}] = -8\pi \left(S_{ab} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} S \right), \quad (2.6)$$

ahol S_{ab} a héj felületi energia-impulzus tenzora, és $S = \gamma^{ab} S_{ab}$. Folyadékmodell esetén

$$S_{ab} = (\sigma + \mathcal{P}) u_a u_b + \mathcal{P} \gamma_{ab}, \quad (2.7)$$

ahol σ a héj saját rendszerében mért felületi energiasűrűsége, \mathcal{P} a kétdimenziós nyomás, u^a pedig a háromdimenziós időszerű sebességvektor. A $\gamma_{ab} u^a u^b = -1$ normálási feltételt kihasználva írhatjuk, hogy $S = 2\mathcal{P} - \sigma$. Vékony héj esetében S_{ab} előáll, mint az alábbi határérték.

$$S_{ab} = e_{(a)}^\nu e_{(b)}^\mu \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} T_{\mu\nu} d\xi, \quad (2.8)$$

ahol $T_{\mu\nu}$ a négydimenziós energia-impulzus tenzor, ξ a felületre merőleges Gauss-féle normál koordináta, amelyre $\xi = 0$ teljesül a felületen.

Megjegyezzük, hogy a γ_{ab} és K_{ab} mennyiségeket rendre első és második fundamentális formának nevezzük a differenciál geometriában. Azzal, hogy a Lánczos-egyenlet által összefüggést teremtettünk a héjat alkotó anyag és a szomszédos téridő tartományokban felírt görbületi mennyiségek között, lehetővé válik, hogy a felület két oldalán a dinamikát leíró Einstein-egyenletek felületre vett projekcióit az S_{ab} felületi energia-impulzus tenzonnal fejezzük ki, így kapjuk a dinamikát leíró egyenletek összességét általános esetben, amely egyenleteket az A. függelékben részletezünk.

2.2. Gömbszimmetrikus téridők illesztése

A gömbszimmetria azt jelenti, hogy a téridőnek az $SO(3)$ forgáscsoport izometriája, és a forgáscsoportoz tartozó pályák (orbitok) kétdimenziós

⁴Megjegyezzük, hogy a Lánczos-egyenlet felírható

$$S_{ab} = -\frac{1}{8\pi} ([K_{ab}] - \gamma_{ab}[K])$$

alakban is, ahol $K = \gamma^{ab} K_{ab}$. Azt is fontos megjegyezni, hogy a Lánczos-egyenlet alakja az ábra szerint választott konvenció esetében ilyen alakú. Ha a normál vektorokat, amelyekkel a külső görbületet definiáljuk, olyan orientációkkal vennénk fel, amelyek eltérnek a korábban definiált konvenciótól, akkor a Lánczos-egyenletben fellépne egy előjelváltás, és a külső görbületek különbsége helyett azok összege jelenne meg az egyenletben.

gömbfelületek, amelyek koordinátázhatók a megszokott (ϑ, ϕ) gömbi koordinátákkal. A gömbfelületeken az indukált metrika $r^2 d\Omega^2$, ahol

$$d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2, \quad (2.9)$$

és r az ún. kerületi sugár, amellyel kifejezve a gömb felszíne $4\pi r^2$.

Ha a teljes rendszer gömbszimmetrikus, az azt jelenti, hogy a peremes $\widetilde{\mathcal{M}}^-$ és $\widetilde{\mathcal{M}}^+$ téridő tartományok, amelyeket összeillesztünk külön-külön gömbszimmetrikusak, és ennek megfelelően a perem is gömbszimmetrikus. Az $\widetilde{\mathcal{M}}^-$ és $\widetilde{\mathcal{M}}^+$ téridő tartományokat az \mathcal{M}^- és \mathcal{M}^+ téridőkből származtatjuk, ezért feltehetjük, hogy \mathcal{M}^- és \mathcal{M}^+ is gömbszimmetrikusak. Az \mathcal{M}^- és \mathcal{M}^+ gömbszimmetrikus téridők $g_{\alpha\beta}$ metrikáit ennek megfelelően az alábbi általános gömbszimmetrikus alakban vehetjük fel.

$$ds_{\pm}^2 = -f_{\pm}(r, t_{\pm}) dt_{\pm}^2 + h_{\pm}(r, t_{\pm}) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.10)$$

ahol a \pm indexek a megfelelő tartományhoz tartozó mennyiségeket jelölik. Az r koordinátát nem indexeltük, ugyanis a $[\gamma_{ab}] = 0$ feltétel miatt folytonosan megy át. Fontos megjegyezni, hogy a fenti metrika bizonyos helyeken singularitással rendelkezhet, vagyis általánosan csak szakaszonként tekinthető érvényesnek.

Azt is meg kell jegyezni, hogy a \pm indexek továbbra sem tüntetik ki egyik felét sem a téridőnek. Csábító lehet az a gondolat, hogy gömbszimmetria esetén a téridő „belseje” kapja a mínusz indexet, a téridő „külseje” pedig a plusz indexet, azonban a „belseje” és „külseje” fogalmak nem is olyan könnyen definiálhatók, mint azt elsőre gondolnánk⁵ [88, 90], ráadásul elvileg lehetőség van belső-belső és külső-külső típusú téridő illesztésére is, amelyek olyan egzotikus szituációkat írnak le, mint egy két centrummal [91] rendelkező téridő vagy egy féreglyuk [31, 32], ezért ezt a konvenciót egyelőre nem vezetjük be.

Viszátérve a leírásra, a Σ^{\pm} hiperfelületek egyenletét a (2.3) összefüggés alapján leíró F_{\pm} függvényt gömbszimmetria esetén az alábbi formában írhatjuk

$$F_{\pm}(r, t_{\pm}) = r - R_{\pm}(t_{\pm}), \quad (2.11)$$

ahol $R_{\pm}(t_{\pm})$ a gömbhéj sugara t_{\pm} függvényében. A Σ^{\pm} hiperfelületek koordinátázására használhatjuk a $\xi^a = (\tau, \vartheta, \phi)$ koordináta hármast, ahol τ a

⁵Sok helyen az irodalomban azt nevezik külső téridőnek, amelyekben a sugár értéke növekszik a hiperfelületre merőleges a téridő belseje felé mutató normálvektor mentén. Ez azonban nem lehet a hiperfelület által elválasztott peremes téridőre globálisan érvényes tulajdonság, ugyanis a horizont alatt megfordulhat, mert a sugár nem térszerű-koordináta. Ehelyett a külső-belső fogalmat globálisan érdemes definiálni, például úgy, hogy a téridőnek az a fele a külső, amelyik tartalmazza az i^0 térszerű végtelen pontot.

$\vartheta, \phi = \text{konst.}$ görbéken mért sajátidő. Ebben az esetben az ívelemnégyszet a Σ^\pm hiperfelületen az alábbi módon írható:

$$ds^2|_\Sigma = -d\tau^2 + R^2(\tau) d\Omega^2 \quad (2.12)$$

vagy kiírva részletesen mátrix alakban

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & R(\tau)^2 & 0 \\ 0 & 0 & R(\tau)^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, R(\tau)^2, R(\tau)^2 \sin^2 \vartheta) \quad (2.13)$$

ahol $R(\tau)$ a gömbháj sugara a sajátidő függvényében. Mivel a sajátidővel paraméterezhető a felület mozgása, ezért bevezethetjük a $T_\pm(\tau)$ függvényeket, melyek adott τ sajátidő esetén megadják a háj t_\pm koordinátáit a határoló téridőkben. Ezek segítségével felírhatók a háj 4-es sebességének komponensei a háj két oldalán alkalmazott koordinátákkal

$$u_\pm^\alpha = (\dot{T}_\pm, \dot{R}, 0, 0), \quad (2.14)$$

ahol $\dot{T}_\pm = dT_\pm/d\tau$ és $\dot{R} = dR/d\tau$. A 4-es sebességre érvényes normálási kritérium $u_\alpha u^\alpha = -1$, ezért u^α nem más, mint az $e_{(\tau)}^\alpha$ egység vektor. A normálási feltétel miatt továbbá a komponensek nem függetlenek egymástól, hanem fennáll az alábbi összefüggés

$$-f_\pm \dot{T}_\pm^2 + h_\pm \dot{R}^2 = -1, \quad (2.15)$$

ebből következik, hogy

$$|\dot{T}_\pm| = \sqrt{\frac{1 + h_\pm \dot{R}^2}{f_\pm}}, \quad (2.16)$$

ahol h_\pm és f_\pm természetesen az R sugárnál számítandó. Fontos megjegyezni, hogy a (2.15) egyenlet alapján csak \dot{T} négyzete egyértelműen meghatározott, Ha azonban t időkoordináta, és azt a konvenciót használjuk, hogy τ és t is jövőbe irányított, akkor \dot{T} pozitív kell legyen, és ennek megfelelően az abszolút érték jele elhagyható. Megjegyezzük azonban, hogy t nem minden esetben időszerű koordináta, például Schwarzschild téridőben az eseményhorizont alatt nem az.

Az $u^\alpha n_\alpha = 0$ ortogonalitási reláció alapján megadható a hiperfelületre merőleges térszerű normálvektor alsóindexes komponenseit egy előjel erejéig:

$$n_{\alpha\pm} = \epsilon_{n\pm} h_\pm f_\pm (-\dot{R}, \dot{T}_\pm, 0, 0), \quad (2.17)$$

amely képletben az $\epsilon_{n\pm}$ előjelfaktor biztosítja a megfelelő orientációt, vagyis ezek az előjelek rögzítik, hogy az \mathcal{M}^- téridő melyik felét az \mathcal{M}^+ téridő melyik feléhez akarjuk illeszteni, a (2). ábrán látható konvenció szerint. Fontos megjegyezni, hogy az $\epsilon_{n\pm}$ előjelfaktorok konstansok a mozgás során, amennyiben a koordinátázás olyan, hogy a t és r koordinátákhoz tartozó egységvektorok folytonosan változnak a hiperfelület mentén. Abban az esetben, amikor a téridő (2.10) metrikája koordináta szingularitással rendelkezik az adott koordinátázás szerint, akkor az ϵ_n előjelfaktor csak térképenként állandó, és nem feltétlenül változatlan a koordináta szingularitáson áthaladva. Ezzel szemben általános esetben \dot{R} és \dot{T} is előjelet válthat a mozgás során, ez utóbbi akkor, ha t az adott helyen nem időszerű koordináta.

A gömbszimmetria miatt a héj energiasűrűsége és nyomása csak a sugár függvénye: $\sigma(r)$ és $\mathcal{P}(r)$. Ugyancsak a gömbszimmetria miatt a külső görbület komponensei között fennáll a $K_{\phi\phi} = K_{\vartheta\vartheta} \sin^2 \vartheta$ összefüggés. Ezért (2.6) két egyenletre redukálódik, amelyeket az alábbi formába írhatunk

$$[K_{\vartheta\vartheta}] = -4\pi\sigma r^2, \quad (2.18)$$

$$[K_{\tau\tau}] = -8\pi(\sigma/2 + \mathcal{P}). \quad (2.19)$$

A normál vektor a (2.17) képlete segítségével a külső görbület releváns komponensei kifejezhetők (2.5) alapján és a fenti egyenletbe helyettesítve kapjuk a dinamikai egyenleteket gömbszimmetria esetén. A rendszert tovább specializálva, a következő alfejezetben, vákuummal határolt gömbhéj esetében részletezzük a számításokat.

2.3. Vákuumban mozgó gömbhéj

Ebben az alfejezetben feltesszük, hogy a héj vákuumban mozog, vagyis mindkét oldalán vákuum téridő van. Ekkor gömbszimmetria esetén a Birkhoff-tétel [92, 93] szerint a határoló téridők szükségszerűen Schwarzschild téridők darabjai kell legyenek. Ebben az esetben a (2.10) metrika egyszerűsödik és $h_{\pm}(r, t) = f_{\pm}(r, t)^{-1} = f_{\pm}(r)$ alakban írható, ahol

$$f_{\pm}(r) = 1 - \frac{2m_{\pm}}{r}. \quad (2.20)$$

ahol m_{\pm} a Schwarzschild téridők tömegparaméterei.

Megjegyezzük, hogy az általánosított Birkhoff-tétel alapján ugyanilyen metrikával, csak konstans tömegparaméter helyett formálisan a sugártól függő $m(r)$ tömegfüggvénnyel írható le a gömbszimmetrikus elektrovákuum,

amelyet a Reissner–Nordström metrika ír le, Q töltéssel az alábbi formában⁶.

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (2.21)$$

ahol M a Schwarzschild taghoz tartozó tömegparaméter. Λ kozmológiai konstans esetén a de Sitter–Schwarzschild téridő is leírható egyetlen $f(r)$ függvénnyel az alábbi alakban

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\Lambda}{3} r^2, \quad (2.22)$$

amely $M = 0$ esetén szimplán de Sitter téridőt ír le.

Schwarzschild téridő esetén a tömegparaméterek természetes módon kínálják a lehetőséget arra, hogy azt a konvenciót alkalmazzuk, miszerint a kisebb tömeggel rendelkező téridőre az \mathcal{M}^- , a nagyobbra pedig az \mathcal{M}^+ elnevezést használjuk. Ezáltal tehát rögzítettük, hogy $m_- < m_+$. Megjegyezzük azonban, hogy más konvenciót is használhatunk, lásd a későbbiekben.

A normál vektor a (2.17) képlete segítségével, felhasználva, hogy $h_{\pm} f_{\pm} = 1$, kifejezhetjük a külső görbület releváns komponenseit. A B. függelékben részletezett módon a (2.20) metrikus függvény esetére azt kapjuk, hogy

$$K_{\vartheta\vartheta}|_{\pm} = \epsilon_{n\pm} f_{\pm} R \dot{T}_{\pm}, \quad (2.23)$$

$$K_{\tau\tau}|_{\pm} = -\epsilon_{n\pm} f_{\pm}^{-1} \dot{T}_{\pm}^{-1} \left(\ddot{R} + \frac{1}{2} f'_{\pm} \right). \quad (2.24)$$

ahol a vesszőzés a sugár szerinti deriváltat jelöli és f_{\pm} természetesen az R sugárnál számítandó. A (2.16) összefüggés alapján írhatjuk, hogy

$$\dot{T}_{\pm} = \frac{\epsilon_{t\pm} \sqrt{f_{\pm} + \dot{R}^2}}{f_{\pm}}, \quad (2.25)$$

ahol bevezettük az $\epsilon_t = \text{sign}(f \dot{T})$ előjelet. Felhasználva a (2.23) és a (2.25) kifejezéseket, a (2.18) dinamikai egyenlet az alábbi alakba írható

$$s_- \sqrt{f_- + \dot{R}^2} - s_+ \sqrt{f_+ + \dot{R}^2} = 4\pi\sigma R, \quad (2.26)$$

ahol $s_{\pm} = \epsilon_{n\pm} \epsilon_{t\pm}$ összevont előjelek. A fenti egyenlet a (2.19) egyenlettel együtt adja a dinamikai egyenleteket, azonban a későbbiekben látni fogjuk, hogy a (2.19) használata helyett egyszerűbb lesz egy megmaradási tételt használni.

⁶ $4\pi\epsilon_0 = 1$ egységrendszerben.

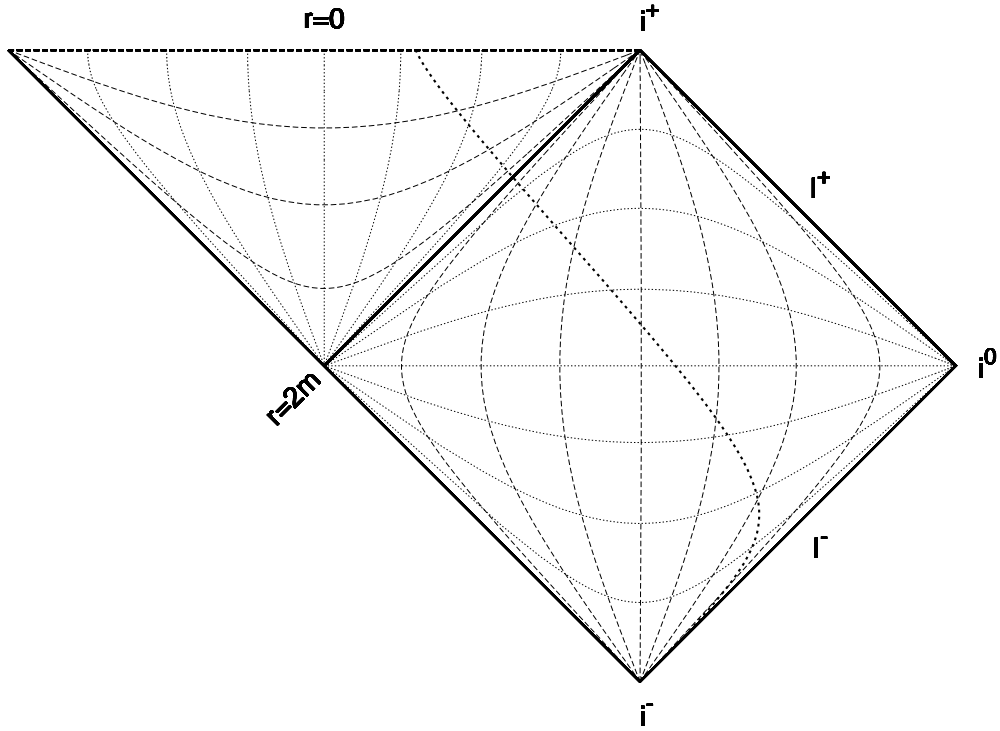
Az előjelekről kell szólnunk pár szót. Korábban említettük, hogy az ϵ_n előjel egy térképen belül állandó. A Schwarzschild metrikának azonban a szokásos koordinátákban szingularitása van a horizonton, ezért meg kell vizsgálni, hogy van-e előjel különbség a horizont alatt és felett, ha azt akarjuk, hogy a normál vektor a hiperfelületnek ugyanarra az oldalára mutasson. Ezt kétféleképpen is megtehetjük. Egyrészt konkrétan megvizsgálhatjuk, hogy merre mutat a normálvektor például a Carter–Penrose diagramon, segítségként lásd a 3. ábrát. Vagy áttérhetünk olyan koordinátákra, amelyek nem szingulárisak a horizonton. Mindkét módszerrel könnyen belátható, hogy a Schwarzschild koordináták speciálisan olyanok, hogy az ϵ_n előjel nem változik, azaz globálisan is állandó. Sőt általánosan igaz, hogy az $\epsilon_n = +1$ előjel tartozik ahhoz a normál vektorhoz, amelyik az aszimptotikusan sík külső tartományba mutat, azaz amelyik a téridőnek azon felére mutat, amelyik tartalmazza az i^0 végtelen távoli térszerű pontot. Hogy ez a horizont felett így van, az egyszerűen következik abból, hogy az aszimptotikusan sík tartományon ez nyilvánvaló. A horizont alatt pedig az alábbi rövid gondolatmenettel belátható. A horizont alatt $-r$ időkoordináta, ezért a normálvektor r -komponense irreleváns abból a szempontból, hogy a normálvektor melyik térszerű részbe mutat. A t -koordinátához tartozó térszerű egységvektor azonban a konstans r koordinátagörbe mentén az i^+ felé mutat, ami azt jelenti hogy pozitív t -komponens esetén mutat az aszimptotikusan sík térszerű végtelen felé a normálvektor. Mivel $n^t = \epsilon_n \dot{R}/f$, ezért $\epsilon_n = +1$ esetén lesz pozitív, hiszen $-r$ időkoordináta, ezért $\dot{R} < 0$ a horizont alatt, és f szintúgy negatív a horizont alatt. Megjegyezzük, hogy ezzel szemben ϵ_t nem feltétlenül állandó a mozgás során.

Az $m_- < m_+$ konvenció esetében, és feltéve azt, hogy a σ felületi energiasűrűség nem negatív, a (2.26) egyenlet vizsgálatából az látszik, hogy az illesztés nem megengedett, $s_- = -1$ esetében. Hiszen az $m_- < m_+$ relációból következik, hogy $f_- > f_+$, és ezért a (2.26) egyenlet bal oldalán az első gyökös kifejezés a nagyobb, ha tehát ez negatív előjellel szerepel, akkor azt a másik gyökös kifejezés nem tudja kompenzálni, vagyis a bal oldal negatív lesz bármilyen s_+ előjel esetén, miközben a jobb oldalon pozitívnek kell lennie. Ebből is látszik, hogy féreglyuk megoldást, amikor $s_- = -1$, csak negatív energiasűrűségű héjjal lehetséges konstruálni.

Attól függetlenül egyébként, hogy milyen értéket vesznek fel az s_{\pm} előjelek kétszeri négyzetre emelés és algebrai átrendezések után a (2.26) egyenletből az alábbi mozgásegyenlet vezethető le

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{R}{2m_{\Sigma}} \right)^2 (f_+ - f_-)^2 - \frac{1}{2} (f_+ + f_-) + \left(\frac{m_{\Sigma}}{2R} \right)^2, \quad (2.27)$$

ahol $m_{\Sigma} = 4\pi\sigma R^2$ a héj saját tömege, amiben szerepel a héj részecskéinek tan-



3. ábra. Schwarzschild téridő Carter–Penrose diagramjának „kettévágása”. Schwarzschild téridő Carter–Penrose diagramja és abban egy héj világvonala látható az ábrán, ez utóbbi vastag pontozott vonallal. A vékony szaggatott görbék $r = konst.$ koordináta vonalakhoz, a vékony pontozott görbék pedig $t = konst.$ koordináta vonalakhoz tartoznak. Az ábrán szereplő kitüntetett pontok közül i^+ a Schwarzschild téridő jövő időszerű végtelene, i^- a múlt időszerű végtelen, i^0 a térszerű végtelen, továbbá I^+ a jövő fényszerű végtelen, I^- pedig a múlt fényszerű végtelen. Fontos megjegyezni, hogy ez az ábra a teljes rendszernek nem Carter–Penrose diagramja, az ábrának csak az egyik fele tekinthető a héj Carter–Penrose diagramjának egyik feleként. Itt most csak az a fontos, hogy a héj világvonala reprezentálja a Σ^- vagy Σ^+ hiperfelületek valamelyikét a megfelelő \mathcal{M}^- vagy \mathcal{M}^+ téridők egyikében, melynek tömegparaméterét m -el jelöltük az ábrán. Megjegyezzük, hogy az időmérés zéruspontját tetszőlegesen választhatjuk. Jelen esetben olyan választással éltünk a jól láthatóság kedvéért, hogy a világvonala az ábra közepe táján haladjon keresztül.

genciális belső mozgásból származó kinetikus energia is. Fontos megjegyezni, hogy rögzített előjel választás esetén a (2.26) egyenletből következik a (2.27) egyenlet, de a következtetés visszafelé nem feltétlenül igaz, csak annyi, hogy a négy lehetséges előjel kombináció közül az egyikre teljesül (2.26). Ez azt jelenti, hogy abban az esetben, ha a dinamikai változók teljesítik a (2.27) egyenletet, még nem biztos, hogy az adott problémához megfelelő kezdőfeltételek lennének. Ennek vizsgálatára később még visszatérünk. További észrevétel, hogy ez a mozgásegyenlet érvényes tetszőleges anyagból álló héjra a héj állapotegyenletétől függetlenül, ráadásul az egyenlet nem csak Schwarzschild téridőre érvényes, hanem de Sitter vagy Reissner–Nordström téridőre is a megfelelő $f(r)$ metrikus függvénnyel. A határoló téridőknek csak az adott sugár melletti f_{\pm} metrikus függvényei szerepelnek az egyenletben, ráadásul szimmetrikusan, amely észrevétel egybevágh azzal, hogy a héj két oldalán lévő téridők felcserélhetők. Schwarzschild vákuum esetén a (2.20) metrikus függvény behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{\Delta m}{m_{\Sigma}} \right)^2 - 1 + \frac{m_+ + m_-}{R} + \left(\frac{m_{\Sigma}}{2R} \right)^2, \quad (2.28)$$

ahol $\Delta m = m_+ - m_-$. A mozgásegyenletben szereplő m_{\pm} Schwarzschild tömegparaméterek állandók, azonban m_{Σ} általános esetben a sugár függvénye, ezért ahhoz hogy a (2.26) mozgásegyenletet meg tudjuk oldani, szükségünk van még egy egyenletre. A második egyenlet nem más, mint a (2.19) egyenlet, amelyben viszont szerepel a \mathcal{P} nyomás, mint új változó. Tehát az egyenletrendszer megoldásához még egy összefüggésre szükség van. Ez az összefüggés nem más, mint a szóban forgó anyag állapotát leíró állapotegyenlet, ami összekapcsolja az energiasűrűséget a nyomással $\mathcal{P}(\sigma)$ alakban. A (2.19) egyenlet azonban meglehetősen bonyolult és második deriváltakat tartalmaz. Ezzel ekvivalens, de sokkal célravezetőbb a következő fejezetben részletezett radiális megmaradási egyenlet használata, amelynek segítségével és az állapotegyenlet felhasználásával meghatározható az $m_{\Sigma}(r)$ függvény, és így csak a (2.26) mozgásegyenletre lesz szükségünk a továbbiakban.

A (2.25) képletben szereplő gyök alatti kifejezések a (2.28) segítségével teljes négyzetté alakíthatók, és végeredményben azt kapjuk, hogy

$$\dot{T}_{\pm} = \epsilon_{t\pm} f_{\pm}^{-1} \left| \frac{\Delta m}{m_{\Sigma}} \mp \frac{m_{\Sigma}}{2R} \right|. \quad (2.29)$$

Mivel Δm definíció szerint nem negatív m_{Σ} pedig pozitív, ezért az abszolút érték jelen belül szereplő mennyiség $-$ index esetén (amikor az abszolút érték jelen belül a műveleti jel $+$) nem válhat zérussá. $+$ index esetén azonban \dot{T}_+ zérussá válhat, és ez bekövetkezik az alábbi sugár értéknél, amennyiben a

mozgás során előáll ez a sugár érték.

$$\bar{R} = \frac{m_\Sigma^2}{2\Delta m} \quad (2.30)$$

Általános esetben, mivel m_Σ a sugár függvénye, felmerülhet a kérdés, hogy létezik-e és csak egyetlen ilyen sugár érték a mozgás során, amely teljesíti fenti egyenletet. Könnyen belátható, hogy egyértelműen létezik. Konvencionális anyag esetén, amelynek a nyomása nem negatív, megmutatható a következő alfejezetben használt radiális megmaradási tétel alapján, hogy a héj saját tömege a sugár függvényében monoton csökkenő függvény, tehát a (2.30) egyenlet jobb oldala szintúgy. A bal oldalra az identitás függvényt írva, az zérusról indulva szigorúan monoton nő. Mindkét oldal pozitív, és folytonos, ezért pontosan egy helyen egyezik meg az értékük.

Folytonossági megfontolásból ϵ_{t-} nem változik a mozgás során, hiszen ellenkező esetben \dot{T}_- ugrást szenvedne mozgás közben. ϵ_{t+} viszont \bar{R} sugárnál előjelet vált, mert ellenkező esetben \dot{T}_+ deriváltja ugrást szenvedne az abszolút érték jel miatt. Ebből viszont az is következik, hogy az \bar{R} sugárnak a horizont alatt kell lennie, hiszen a horizont fölött nem válhat \dot{T}_+ zérussá. Természetesen lehetséges olyan rendszer, amely nem megy be a horizont alá, ha azonban a héj a horizont alá megy, akkor áthalad az \bar{R} sugáron, és ott megtörténik az előjelváltás.

Eddig azt a konvenciót használtuk, hogy $m_- < m_+$, de ez nem feltétlenül jelenti azt, hogy a centrumban lévő tömeg m_- és a külső téridő tömegparamétere, vagyis a teljes rendszer tömege, pedig m_+ . A továbbiakban azonban csak hagyományos héjakkal fogunk foglalkozni. Hagyományos héj alatt azt értjük, hogy a héj egyik oldala belső Schwarzschild téridő, a másik oldala pedig külső Schwarzschild téridő, vagyis kizárjuk a kétcentrumú illetve a féreglyuk megoldásokat. A továbbiakban csak ilyen héjakról szeretnék értekezni, bár az eddig levezetett eredmények alkalmazhatók lennének nem hagyományos héjakra is. Hagyományos héjak esetén alkalmazhatunk a korábbiaktól eltérő jelölési konvenciót, nevezetesen azt, hogy a belső peremes téridő legyen \mathcal{M}^- , a külső pedig \mathcal{M}^+ . Ez azt jelenti, hogy rögzítettük a $\epsilon_{n\pm}$ előjeleket, és mindegyikük $+1$. Fontos azonban megjegyezni, hogy ezzel a rögzítéssel már nem feltétlenül teljesül, hogy $m_- < m_+$. Azonban hagyományos héjak esetén mégis ezt a konvenciót alkalmazzuk a továbbiakban, ugyanis majd héjrendszerek esetében sokkal célravezetőbb lesz ez a jelölési mód, ugyanis a héjak sugár szerinti sorbarendezéséhez igazodik a jelölés.

Megjegyezzük, hogy abban az esetben, ha feltesszük, hogy csak egyetlen héjat vizsgálunk, vagyis a teljes téridő ennek az egyetlen héjnak a térideje, és a héj világvonalának van olyan pontja, amely az eseményhorizonton kívül van, azaz $s_\pm = +1$, akkor abban a pontban teljesülnie kell $m_- < m_+$ relá-

ciónak, tehát globálisan is, mivel a Schwarzschild tömegparaméterek konstansok. Az pedig nem lehetséges, hogy egy héj világvonala teljes egészében csak a horizonton belül haladjon, mert a szingularitás tételekből tudjuk, hogy a szingularitás elérése véges sajátidő alatt történik. Az azonban lehetséges, hogy a héj világvonala a kiejesztett Schwarzschild-téridő másik tartományából érkezik amely a mi horizonton kívüli tartományunkkal nincsen kauzális kapcsolatban. Ebben az esetben $m_- < m_+$. Ha azonban az ilyen típusú héjaktól eltekintünk, akkor a korábban használt konvenció, amikor a nagyobb Schwarzschild tömegparaméterrel rendelkező tartományt indexeltük + jellel, megegyezik azzal a konvencióval, amelynél a külső tartományt indexeljük + jellel. Fontos azonban megjegyezni, hogy ez csakis akkor érvényes, ha a teljes téridőben egyetlen héj létezik. A tömeg infláció jelenségénél (4.4.4. alfejezet) később látni fogjuk, hogy héjrendszerek ütközések során kialakíthatnak olyan szituációt, amelyben $m_- > m_+$ a héj két oldalán, de ekkor az m_- és m_+ tömegparaméterű téridő tartományok nem fedik le a teljes téridőt.

Hagyományos héjak esetén a belső tartomány tömegparamétere legyen m_c , a külső tartomány tömegparamétere pedig $m_c + m_g$. Ekkor m_g lehet akár negatív is. A héj sajáttömege legyen m_r . A C. függelék alapján az ϵ_t előjel rögzíthető, és azt írhatjuk, hogy

$$\dot{T}_{\pm} = f_{\pm}^{-1} \left(\frac{m_g}{m_r} \mp \frac{m_r}{2R} \right). \quad (2.31)$$

2.4. Radiális megmaradási egyenlet

Ahhoz, hogy meghatározzuk az m_{Σ} saját tömeget a sugár függvényében, gömbszimmetria esetében használhatjuk a radiális megmaradási egyenletet, amely a $D^a S_{ab} = 0$ megmaradási egyenletből adódik (lásd az A. függelék), ahol D_a a γ_{ab} szerinti kovariáns deriválást jelöli.

$$\frac{d}{d\tau} (\sigma r^2) = \mathcal{P} \frac{d}{d\tau} (r^2) \quad (2.32)$$

Csak a teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a (2.32) egyenlet közvetlenül is levezethető a (2.18) és (2.19) egyenletekből. A sajátidő helyett áttérve a sugárra, mint változóra, az alábbi radiális megmaradási egyenletet kapjuk:

$$r \frac{d\sigma}{dr} = -2(\sigma + \mathcal{P}). \quad (2.33)$$

Ha ismerjük az állapotegyenletet $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\sigma)$ alakban akkor (2.33) egyenletbe helyettesítve $\sigma = \sigma(r)$ meghatározható a differenciálegyenlet megoldásával, és ebből $m_r(r)$ is meghatározható. Mivel (2.33) szeparábilis differenciálegyenlet, az implicit megoldás az alábbi alakban írható

$$\frac{r}{r_0} = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{\sigma_0}^{\sigma(r)} \frac{d\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma} + \mathcal{P}(\tilde{\sigma})} \right), \quad (2.34)$$

ahol $\sigma_0 = \sigma(r_0)$ integrációs konstans.

Az alábbiakban összefoglaljuk a leginkább használatos és számunkra a későbbiekben fontos állapotegyenleteket, és elvégezve az integrálást explicit vagy implicit formában megadjuk a megoldást. Megjegyezzük, hogy ezen eredmények függetlenek attól, hogy konvencionális vagy nem konvencionális héjat tekintünk.

2.5. Állapotegyenlet

Az állapotegyenlet az anyag állapotát leíró mennyiségek közötti összefüggés, folyadékmodell esetén tipikusan a nyomás és a sűrűség közötti kapcsolat. Az általános relativitáselméletben pedig praktikusán a nyomás (p) és az energiasűrűség (ρ) közötti összefüggés. Kétdimenziós infinitezimális héjat alkotó ideális anyag esetén pedig a kétdimenziós nyomás (\mathcal{P}) és a felületi energiasűrűség (σ) közötti függvénykapcsolat. Ez a függvénykapcsolat az anyag fajtájától függ, ha azonban nincs pontos információnk az arról, hogy milyen anyag alkotja a kérdéses objektumot, jelen esetben a héjat, akkor is feltételezhetünk valamilyen függvénykapcsolatot a két mennyiség között, amelynek, mint az alábbiakban látni fogjuk, bizonyos feltételeket teljesítenie kell. Természetesen abban az esetben, ha a héjmodellt azon célból használjuk, hogy valódi vékony héjat közelítsünk vele, akkor felmerül a kérdés, hogy miként kapcsolódik a kétdimenziós állapotegyenlet a valódi (modellezni kívánt) háromdimenziós anyag állapotegyenletéhez. Ha feltesszük, hogy a modellezni kívánt vékony héj vastagsága δr , akkor a tömeg egyenlősége alapján $\sigma \cdot \delta r = \rho$ és a héj radiális keresztmetszetére ható tangenciális erők egyenlősége alapján $\mathcal{P} \cdot \delta r = p$.

Az állapotegyenlet pedig nem lehet tetszőleges, ha megkövetelünk az anyagra bizonyos ésszerű feltevéseket. A kauzalitás következménye az általános relativitáselméletben az ún. domináns energiafeltétel, amely folyadékmodell esetén azt a megszorítást jelenti, hogy $|\mathcal{P}| \leq \sigma$, amelyből rögtön következik, hogy σ pozitív. Megjegyezzük, hogy az állapotfüggvény deriváltja az anyagban terjedő hang sebességével áll kapcsolatban.

$$c_s^2 = \frac{d\mathcal{P}}{d\sigma} \quad (2.35)$$

A hatás véges sebességének posztulátuma megköveteli, hogy a hangsebesség ne legyen nagyobb, mint a fénysebesség. Továbbá a negatív hangsebesség

hidrodinamikai instabilitásnak felel meg a felületen, ezért mindent összevetve megköveteljük, hogy $0 \leq c_s \leq 1$.

A legegyszerűbb állapotegyenlet az, amelynél az anyag energiasűrűségétől függetlenül zérus a nyomás, ezt hívjuk pornak. Annak ellenére, hogy ez egy idealizáció, a csillagok és galaxisok skáláján ez a domináns állapotegyenlet az Univerzumban, mert mind a csillagok mind a galaxisok a méretükhöz képest nagyon ritkán helyezkednek el, és nagyon ritkán ütköznek össze, ezért jó közelítés a nyomás elhanyagolása. Por héj esetén a héj saját tömege változatlan a sugár függvényében, hiszen a (2.32) egyenlet jobb oldala zérus.

Az alábbiakban összefoglaljuk a leggyakoribb állapotegyenlet típusokat, és megoldjuk a (2.34) egyenlethez tartozó megoldásokat is.

2.5.1. Homogén lineáris állapotegyenlet

A lehető legegyszerűbb egy paraméteres állapotegyenlet, ha a nyomás az energiasűrűség homogén lineáris függvénye, amelyet az alábbi alakban írunk.

$$\mathcal{P}(\sigma) = w\sigma. \quad (2.36)$$

Egy ilyen homogén lineáris állapotegyenletű anyagban a hangsebesség konstans $c_s^2 = w$. A domináns energiefeltétel teljesülésének feltétele $|w| \leq 1$, amely egyúttal azt is biztosítja, hogy $c_s \leq 1$. Az instabilitás elkerüléséhez feltesszük még, hogy $w \geq 0$, tehát összességében fel kell tennünk, hogy $w \in [0, 1]$. A (2.34) megoldás alakja

$$\sigma(r) = \sigma_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-2(1+w)}. \quad (2.37)$$

Megjegyezzük, hogy $w = 0$ esetben a por héj állapotegyenletét kapjuk vissza.

2.5.2. Törött lineáris állapotegyenlet

A domináns energiefeltétel teljesülése mellett az állapotegyenletnek olyannak kell lennie, hogy $\sigma = 0$ helyen $\mathcal{P} = 0$. Ez azt jelenti, hogy általános lineáris függvény nem lehet, csak homogén lineáris, amely átmegy az origón. Ezért az általános lineáris függvény helyett az alábbi törött lineáris esetet fogjuk tárgyalni, amely sok esetben hasznos, mert nem bonyolult, de adott σ értéknél tetszőlegesen állítható a meredeksége⁷. Sok esetben a gyakorlatban is jól használható ez az állapotfüggvény típus, ugyanis abban az

⁷Gravastarok stabilitás vizsgálatánál használni fogunk a későbbiekben ilyen alakú állapotegyenletet.

esetben, ha az anyag két különböző sűrűség tartományon eltérő modellel írható le, és az egyes tartományokon közelíthető lineáris függvénnyel, akkor az egész állapotegyenlet közelíthető törött lineáris függvénnyel. A törött lineáris állapotegyenletet az alábbi alakban írhatjuk

$$\mathcal{P}(\sigma) = \begin{cases} w_1\sigma & , \text{ ha } \sigma \leq \sigma_1 \\ w_1\sigma_1 + w_2(\sigma - \sigma_1) & , \text{ ha } \sigma > \sigma_1 , \end{cases} \quad (2.38)$$

ahol $\sigma_1 \geq 0$ a töréspont helye az felületi energiasűrűség tengelyén, és w_1, w_2 a lineáris szakaszok meredeksége a törés előtt és után rendre. A domináns energiafeltétel teljesüléséhez és az instabilitás elkerüléséhez megköveteljük, hogy $0 \leq w_1, w_2 \leq 1$ teljesüljön. A (2.34) megoldás expliciten felírható, ehhez definiáljuk a törésponthoz tartozó r_1 sugár értéket $\sigma_1 = \sigma(r_1)$ alapján az alábbi formában.

$$r_1 = \begin{cases} r_0 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right)^{1/(2-2w_1)} & , \text{ ha } \sigma_0 \leq \sigma_1 \\ r_0 \left(\frac{\sigma_0(1-w_2) + \sigma_1(w_2-w_1)}{\sigma_1(1-w_1)} \right)^{1/(2-2w_2)} & , \text{ ha } \sigma_0 > \sigma_1 . \end{cases} \quad (2.39)$$

Ekkor $\sigma_0 \leq \sigma_1$ esetén

$$\sigma(r) = \begin{cases} \sigma_1 \frac{w_1-w_2 + (1-w_1)\left(\frac{r_1}{r}\right)^{2-2w_2}}{1-w_2} & , \text{ ha } r \leq r_1 \\ \sigma_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2-2w_1} & , \text{ ha } r > r_1 , \end{cases} \quad (2.40)$$

és $\sigma_0 > \sigma_1$ esetén

$$\sigma(r) = \begin{cases} \frac{\sigma_1(w_1-w_2) + (\sigma_0(1-w_2) + \sigma_1(w_2-w_1))\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2-2w_2}}{1-w_1} & , \text{ ha } r \leq r_1 \\ r_1 \left(\frac{r_1}{r}\right)^{2-2w_1} & , \text{ ha } r > r_1 . \end{cases} \quad (2.41)$$

2.5.3. Politróp állapotegyenlet

A lineáris állapotegyenletek után a legtöbbet használt állapotegyenlet a politróp. Tisztáznunk kell azonban, hogy pontosan mit is értünk politróp állapotegyenlet alatt, ugyanis általános relativista körben sokszor a $\mathcal{P} \sim \sigma^\kappa$ hatványfüggvény összefüggést nevezik politrópnak⁸, azonban precízen véve a termodinamikában azt nevezik politrópnak amikor a fenti összefüggést az

⁸Ennek az az oka, hogy a relativitáselmélet szempontjából a σ energiasűrűség a lényeges mennyiség, ezért ezt szokás hatvány függvény alakban megadni. Azonban ez a modell feltevés már csak azért is rossz, mert semmilyen hatványkitevő nem tudja teljesíteni a domináns energiafeltételét a teljes tartományon.

energiasűrűség helyett az ε nyugalmi tömegsűrűsége rójuk ki az alábbi módon

$$\mathcal{P} = A \varepsilon^\kappa, \quad (2.42)$$

ahol A az amplitúdó, és κ a hatványkitevő. Ebben az esetben az állapotegyenlet explicite csak az alábbi inverz formában írható fel, felhasználva a termodinamika első főtételét [85].

$$\sigma(\mathcal{P}) = \left(\frac{\mathcal{P}}{A}\right)^{1/\kappa} + \frac{\mathcal{P}}{\kappa - 1}. \quad (2.43)$$

A (2.34) megoldása explicit módon megadható

$$\sigma(r) = \left(\frac{\mathcal{P}_0}{A}\right)^{1/\kappa} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \frac{\mathcal{P}_0}{\kappa - 1} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2\kappa}, \quad (2.44)$$

ahol \mathcal{P}_0 a σ_0 helyen felvett nyomás érték a (2.43) alapján.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a domináns energiafeltétel és a stabilitás teljesülésének kritériuma hogy az amplitúdó legyen pozitív, és $\kappa \in (1, 2]$. Tegyük fel, hogy a politróp állapotegyenletünket úgy akarjuk megválasztani, hogy a σ_0 helyen \mathcal{P}_0 értéket vegyen fel. Ekkor a fentieknek megfelelően κ értékét úgy kell megválasztanunk, hogy beleessen az $[1 + w_0, 2]$ intervallumba, ahol $w_0 = \mathcal{P}_0/\sigma_0$. A hangsebesség négyzete ekkor a σ_0 helyen

$$c_s^2|_{\sigma=\sigma_0} = \frac{\kappa w_0}{1 + w_0}. \quad (2.45)$$

Megjegyezzük, hogy a politróp állapotegyenlet $A \rightarrow +\infty$ határesetben $\kappa - 1$ meredekségű homogén lineáris állapotegyenletbe megy át.

2.6. Kezdő adatok

A dinamikai egyenletek levezetéséhez a matematikus megközelítési módot alkalmaztuk, vagyis feltettük, hogy ismertek a négydimenziós téridők, amelyeket össze akarunk illeszteni, és megvizsgáltuk, hogy milyen egyenletek teljesülése mellett lehet elvégezni az illesztést. Ebben az interpretációban a feladatot meghatározó paraméterek nem kezdő adatok, hanem négydimenziós határfeltételek. A gyakorlatban azonban időfejlődést akarunk leírni, ezért egy klasszikus dinamikai rendszerhez szokásos módon kezdő adatokat szeretnénk megadni, nevezetesen m_0, r_0, v_0 értékeit, ahol m_0 a hég saját tömege, v_0 pedig a saját idő szerinti sebessége az r_0 kezdő sugárnál, és meghatározni, azt hogy milyen téridőt alakít ki maga körül, azaz milyen téridőben fog mozogni.

$$m_0 = m_r|_{r=r_0}, \quad (2.46)$$

$$v_0 = \left. \frac{dr}{d\tau} \right|_{r=r_0}. \quad (2.47)$$

A centrális tömeget, mint külső paramétert szeretnénk megadni, ezzel rögzítjük az egyik tömegparamétert. A külső téridőhöz tartozó Schwarzschild tömegparamétert pedig a (2.28) mozgásegyenlet alapján a kezdő adatokat behelyettesítve ki tudjuk számolni. Ez alapján az alábbi képlet adódik

$$m_g = m_0 \left(-\frac{m_0}{2r_0} + \epsilon_g \sqrt{1 - \frac{2m_c}{r_0} + v_0^2} \right). \quad (2.48)$$

ϵ_g értéke konvencionális esetben $+1$.

Amikor megadjuk a kezdő adatokat, az egyik alapvető feltétel, amelyet teljesíteniük kell, a 4-es sebességre vonatkozó kényszer feltétel, amely szerint a (2.25) egyenletben a gyökjel alatti kifejezés nem lehet negatív, vagyis $f_{\pm} + \dot{R}^2 \geq 0$. Megmutatható, hogyha az egyik indexre teljesül ez az egyenlőtlenség, akkor abból következik a másik index esetén is, így elegendő feltenni, hogy

$$v_0^2 \geq 1 - \frac{2m_c}{r_0} \quad (2.49)$$

a kezdő adatokra. Láthatjuk a (2.48) képlet alapján, hogy ez a feltétel egyben annak a feltétele, hogy m_g nem komplex. Ezen túlmenően megadhatunk tetszőleges kezdő adatokat, de például annak, hogy a rendszer a saját horizontján kívül legyen, nem triviális feltétele van, hiszen a teljes rendszer horizontjának sugara $2(m_c + m_g)$, amely a fenti képlet szerint bonyolult módon függ a kezdő m_0, r_0, v_0 adatoktól. Megmutatható a (2.26) egyenlet tanulmányozásával, hogy $\epsilon_{n\pm} = +1$ esetén, azaz konvencionális héjra érvényes az alábbi táblázat

ϵ_{t-}	ϵ_{t+}	megoldás feltétele	ϵ_g	m_g
$+1$	$+1$	$v_0^2 > A$	$+$	$m_g > 0$
$+1$	-1	$v_0^2 < A$	$+$	$m_g > 0$ ha $v_0^2 > B$ egyébként $m_g \leq 0$

ahol

$$A = \frac{m_0^2}{r_0^2} + \frac{2m_c}{r_0} - 1, \quad (2.50)$$

$$B = \frac{m_0^2}{r_0^2} + \frac{2m_c}{r_0} - 1. \quad (2.51)$$

Megjegyezzük, hogy $r_0 \rightarrow \infty$ esetben a fenti feltételek egyike sem ad korlátozást a sebesség nagyságára, és $r_0 \geq r_A$ estén tetszőleges v_0 sebességgel indított héj a horizonton kívül lesz, ahol

$$r_A = m_c + \sqrt{m_c^2 + m_0^2}. \quad (2.52)$$

2.7. Eddington–Finkelstein koordináták

Mivel Schwarzschild koordinátákban a metrikának szingularitása van a horizonton, ezért a Schwarzschild idő nem alkalmas arra, hogy a horizonton keresztül végig kövessük a héj evolúcióját, hiszen a horizonton \dot{T} végtelenné válik, ezért a statikus Schwarzschild megfigyelő számára végtelen sok idő telik el, amíg a héj eléri a horizontot. Ha követni akarjuk a héj mozgását a horizonton keresztül, akkor át kell térnünk olyan koordinátákra, amelyek nem szingulárisak a horizonton. A legcélszerűbb választás az ún. Eddington–Finkelstein koordináták, amelyekben a metrika mindenütt reguláris az origót kivéve. Az Eddington–Finkelstein koordinátákat úgy kapjuk, hogy az idő koordinátát lecseréljük az ún. Eddington–Finkelstein fényszerű koordinátára, amely nem más, mint $v = t + r^*$, ahol r^* az ún. „teknőc” koordináta, amelyre teljesül, hogy $dr^*/dr = f^{-1}(r)$. Ekkor

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} + \frac{dr^*}{dr} \frac{dr}{d\tau} = \frac{\epsilon_t \sqrt{(dr/d\tau)^2 + f(r)} + dr/d\tau}{f(r)}. \quad (2.53)$$

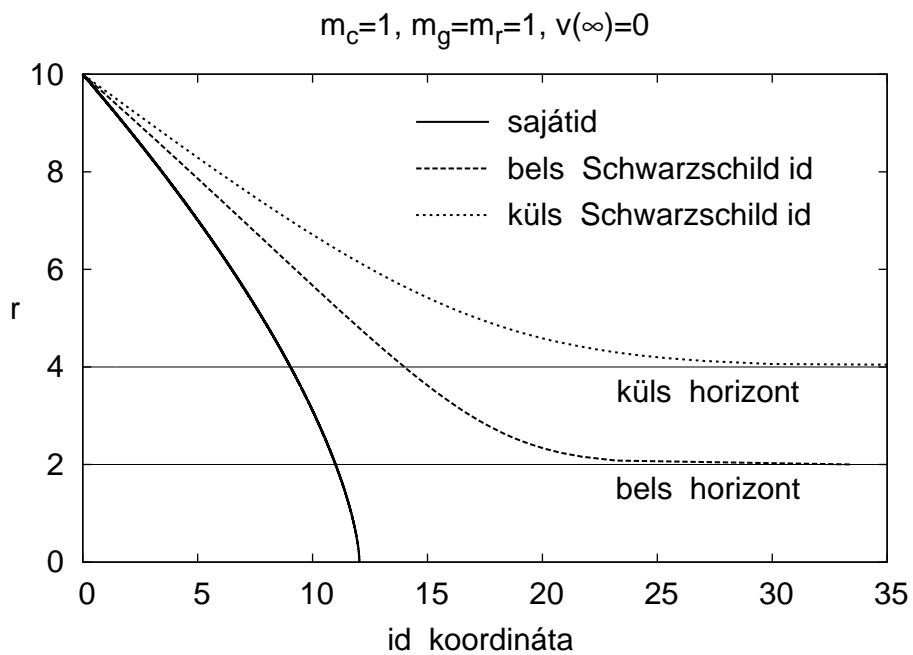
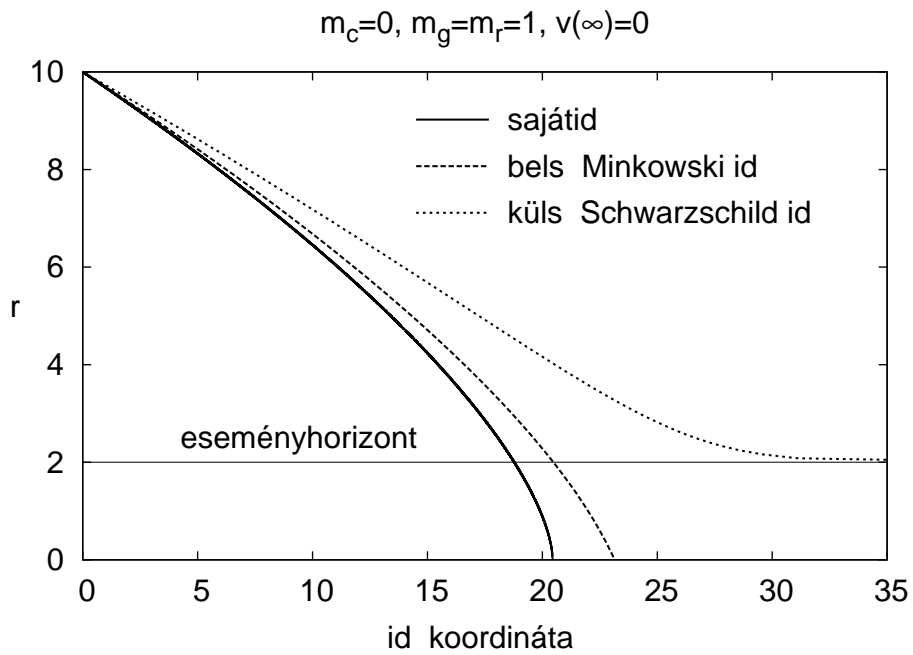
Ennek a koordinátának az az előnye is megvan, hogy \dot{v} mindenképpen pozitív, ugyanis a konstans v koordináta görbék bemenő fényszerű geodetiikusok, ezért időszerű világvonal mentén v monoton változik.

2.8. Porból álló héj mozgása

Ebben az alfejezetben a porból álló héjak mozgásának klasszifikációját adjuk. Az egy héjből álló rendszert gravitációsan kötöttnek nevezzük, ha létezik egy maximális sugár $r_{\max} < \infty$, ahol a sebesség eltűnik. r_{\max} kiszámítható, ha megkeressük a gyökét a (2.28) egyenlet jobb oldalának. Gyök akkor létezik, ha $m_g < m_r$, és ebben az esetben

$$r_{\max} = \left(1 - \frac{m_g^2}{m_r^2}\right)^{-1} \left(m_c + \frac{m_g}{2} + \sqrt{m_c^2 + m_c m_g + \frac{m_r^2}{4}}\right). \quad (2.54)$$

Amikor $m_g = m_r$ akkor a kinetikus energia a végtelenben válik zérussá, vagyis $r_{\max} = \infty$ formálisan. $m_g > m_r$ esetben pedig a mozgás nem korlátos, és (2.48) szerint, amelyet a végtelenben kiértékelve $m_g = m_r \sqrt{1 + v_\infty^2}$ érvényes.



4. ábra. Szemléltető szimulációk. A rendszerek kezdő adatai az ábrák fölött találhatóak. A külső és belső horizont alatt rendre a külső és a belső Schwarzschild téridőben megjelenő eseményhorizontot értjük. Látható hogy a kollapszáló héjak sajátidejükben mérve véges idő alatt omlanak össze, azonban Schwarzschild időben mérve végtelen sok idő alatt érik el a téridő tartományhoz tartozó horizontot.

Általánosságban az a (2.28) mozgásegyenlet megoldása túl bonyolult, de porból álló héj esetén megadható zárt alakban, lásd például [82]. A marginálisan kötött $m_g = m_r$ speciális esetben például az alábbi implicit formában

$$\tau(r) = \frac{(4\tilde{r}m_c + 2\tilde{r}m_r - m_r^2)\sqrt{8\tilde{r}m_c + 4\tilde{r}m_r + m_r^2}}{6(2m_c + m_r)^2} \Bigg|_{\tilde{r}=r}^{\tilde{r}=r_0}, \quad (2.55)$$

Ha $r_0 = 0$ akkor $-\tau(r)$ értéke megadja azt a sajátidő tartamot, amennyi a kollapszus ideje a héj számára r sugárol egészen a középpontig. Még tovább specializálva, egy öngravitáló héjat tekintve, aminek a centrumában nincs tömeg, $m_c = 0$, vagyis Minkowski a belső téridő, azt kapjuk, hogy a kollapszus ideje

$$\tau_c(r) = \frac{m_r}{6} + \frac{\sqrt{4r + m_r}}{3} \left(\frac{r}{\sqrt{m_r}} - \frac{\sqrt{m_r}}{2} \right). \quad (2.56)$$

Ne felejtjük el, hogy ezek az eredmények a marginálisan kötött rendszerre vonatkoznak, azaz a sebesség nem r_0 sugárnál, hanem a végtelenben zérus. Az időt persze megadhatjuk nem csak a saját időben, hanem mondjuk belső Minkowski időben is, felhasználva a (2.31) képletet a változócsereére. Végeredményül azt kapjuk, hogy

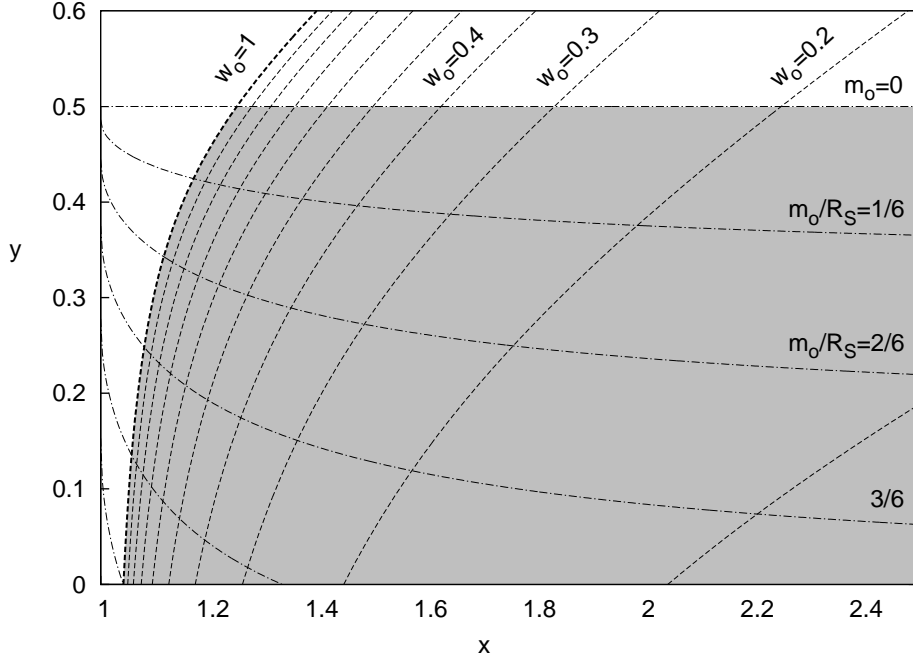
$$t_c(r) = \frac{\sqrt{4r + m_r}}{3} \left(\sqrt{m_r} + \frac{r}{\sqrt{m_r}} \right) - \frac{m_r}{3}. \quad (2.57)$$

A 4. ábrán láthatunk egy példát is a különböző időkben való mozgás leírására, ahol t_c és τ_c értékeit a tengelymetszetek adják.

Megjegyezzük, hogy nem zérus nyomású héjak esetén a mozgás klasszifikációja bonyolultabb, ekkor ugyanis a nyomás megállíthatja a kollapszust akár egy minimum sugárnál is. Mint láttuk por héj esetén nincsen egyensúlyi állapot, azonban homogén lineáris állapotegyenlet esetén van egyensúlyi állapot, bár az minden esetben instabil, lásd [81, 68] cikkeket, illetve a következő alfejezetet. Még bonyolultabb állapotegyenletek esetén, mint amilyen például a politróp, lehet konstruálni stabil egyensúlyi állapotban lévő héjat, vagy olyant, amely mozgása során egy minimum és egy maximum sugár között oszcillál.

2.9. Egyensúlyi állapot

Tekintsünk egy héjat Schwarzschild vákuumban, és keressük a lehetséges egyensúlyi állapotokat. Használjuk egységként a teljes rendszer



5. ábra. Schwarzschild héjak egyensúlyi térképe. A szürke tartomány jelöli azokat a konfigurációkat, amelyek teljesítik a domináns energiafeltételt, és a héj saját tömege nem negatív.

Schwarzschild-sugarát: $R_S = 2(m_c + m_g)$, Vezessük be az alábbi dimenziótlan mennyiségeket. Legyen $x = r_0/R_S$, $y = m_c/R_S$. És legyen $\mathcal{P}_0/\sigma_0 = w_0$. Ekkor egyensúly esetén, amikor is $v_0 = 0$, akkor azt kapjuk, hogy

$$w_0(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\frac{1-1/2x}{\sqrt{1-1/x}} - \frac{1-y/x}{\sqrt{1-2y/x}}}{\sqrt{1-2y/x} - \sqrt{1-1/x}} \quad (2.58)$$

és

$$m_0/R_S = x \left(\sqrt{1-2y/x} - \sqrt{1-1/x} \right) \quad (2.59)$$

amely képletek alapján megrajzolhatjuk az egyensúlyi térképet, ahol x és y dimenziótlan változók függvényében felrajzoltuk az m_0 és w_0 szintvonalakat, és így jól behatárolható az a tartomány, ahol teljesül a domináns energiafeltétel, és nem negatív a héj saját tömege. Ezt a tartományt szürkével jeleztük az 5. ábrán.

2.10. Newtoni mozgásegyenlet

Végül a fejezet végén, az összehasonlítás kedvéért megadjuk a héjak mozgására vonatkozó newtoni dinamika esetén érvényes mozgásegyenleteket is. A newtoni elméletben használt mennyiségeket nagy betűkkel fogjuk jelölni, hogy világosan megkülönböztessük őket a relativisztikus mennyiségektől. A newtoni elméletben a relativisztikus esethez képest nincs kétféle tömeg, a nyugalmi tömeg és gravitációs tömeg ugyanaz, ennek jelölésére az M betűt használjuk. Az is különbség a relativisztikus esethez képest, hogy a newtoni tömeg állandó a mozgás során az állapotegyenlettől függetlenül. További egyszerűség, hogy az idő is egyféle a newtoni elméletben, mégpedig egy globális idő, amelynek a jelölésére a T betűt használjuk. A héj kezdő adatai továbbra is a tömege, a hely és a sebesség: M, R_0, V_0 , ahol $V_0 = dR/dT$ az R_0 helyen. A központi $M_{\text{közp}}$ tömeget továbbra is környezeti változónak tekintjük. Ha össze akarjuk hasonlítani az newtoni mozgást a relativisztikus mozgással, nem egyértelmű, hogy miként szinkronizáljuk a kezdő adatokat. R_0 és V_0 jelentése ugyanaz mindkét elméletben, de M értékének megadásakor kétféle lehetőségünk van: a relativisztikus elméletben érvényes saját tömeg vagy a gravitációs tömeg értékére állítjuk be. A newtoni tartományban természetesen nem okoz nagy különbséget. Mi azt a konvenciót fogjuk használni összehasonlítás esetén, hogy a gravitációs tömeget választjuk azonosnak.

A porhéjra vonatkozó newtoni mozgásegyenlet könnyen származtatható az energia megmaradást kifejező mérleg egyenletből. A héj kinetikus energiája $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}MV^2$, ahol $V = dR/dT$. A héj potenciális energiája $G = 1$ egységrendszerben

$$E_{\text{pot}} = - \int_0^M \frac{M_{\text{közp}} + \tilde{M}}{R} d\tilde{M}, \quad (2.60)$$

amely két részből tevődik össze. Az első tag a héj gravitációs energiája a központi $M_{\text{közp}}$ nagyságú gravitáló tömeg terében, amelynek értéke $-M_{\text{közp}}M/R$. A második tag a héj gravitációs kötési energiája, melynek értéke $-M^2/(2R)$. A rendszer teljes energiája állandó

$$E_{\text{össz}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}MV^2 - \frac{M_{\text{közp}}M}{R} - \frac{M^2}{2R}, \quad (2.61)$$

amelyből

$$\left(\frac{dR}{dT}\right)^2 = \frac{2M_{\text{közp}} + M}{R} + C, \quad (2.62)$$

ahol C állandó, amely a $V_0 = V(R_0)$ kezdőfeltételtől számolható az alábbi képlettel.

$$C = V_0^2 - \frac{2M_{\text{közp}} + M}{R_0}. \quad (2.63)$$

Mindez azonban csak porhéjra érvényes. Nyomással rendelkező héj esetén a nyomásból is származik egy erő.

A nyomásból származó erő kifejezéséhez vizsgáljuk meg a felület egy kis négyzet alakú darabjára ható nyomásból származó erőket. Legyen a négyzet oldalhosszúsága $\Delta\phi R$, ahol $\Delta\phi$ a négyzet oldalának látószöge a gömb középpontjából. A kis felületdarab tömege $\Delta M = \Sigma(R\Delta\phi)^2$, ahol $\Sigma = M/(4\pi R^2)$ a felületi tömegsűrűség. A kis felületdarabra négy oldalról hatnak a nyomásból származó erők a gömbfelülettel érintőlegesen és az oldalakra merőlegesen. Ezeknek az erőknek a nagysága egyenként $\Delta F = P(R\Delta\phi)$, ahol P a kétdimenziós nyomás. Mivel az erők tangenciális irányúak és merőlegesek a kis elemi négyzet oldalaira, ezért az eredő erő sugárirányú és nagysága $\Delta F_{\text{össz}} = 4\Delta F \sin(\Delta\phi/2) \approx 2\Delta F \Delta\phi$. Mindent összevetve az egységnyi tömegre ható nyomásból származó erő $\Delta F_{\text{össz}}/\Delta M = 8\pi PR/M$. Ezért a (2.62) mozgásegyenlet nem zérus nyomás esetén ezzel a taggal bővül, és így az egységnyi tömegre ható gyorsulást az alábbi képlet adja meg.

$$\ddot{R} = -\frac{2M_{\text{közp}} + M}{2R^2} + 8\pi PR/M. \quad (2.64)$$

Az egyenlethez tartozó kezdőfeltétel $\dot{R}(R_0) = V_0$, ahol a pontozás a newtoni idő szerinti deriváltat jelöli. Feltételezve, hogy a nyomás a sugár függvénye: $P(R)$, a nyomásból származó erő egy konzervatív erő, amely könnyen integrálható. Ehhez elegendő feltételeznünk, hogy a nyomás a felületi tömegsűrűség egyértelmű függvénye, mert az utóbbi meg a sugár egyértelmű függvénye. Megszorozva a (2.64) egyenletet az \dot{R} radiális sebességgel és integrálva T szerint kapjuk az energia mérlegegyenletét hasonlóan a (2.28) egyenlethez.

$$\dot{R}^2 = V_0^2 + \left[\frac{2M_{\text{közp}} + M}{\tilde{R}} \right]_{R_0}^R + 4 \int_{R_0}^R \frac{W(\tilde{R})}{\tilde{R}} d\tilde{R} \quad (2.65)$$

ahol $W(R) = P(R)/\Sigma(R)$. Homogén lineáris állapotegyenlet esetén $W(R) = konst.$, és így a (2.65) egyenlet utolsó tagja $4W \log(R_0/R)$ kifejezésre redukálódik.

2.11. Összefoglalás

Ebben a fejezetben nagy részben a héj dinamikájára vonatkozó ismert eredmények kerültek összefoglalásra. Az alábbiakban azonban kiemelnék néhány apróságot, amelyek remélhetőleg hozzájárultak az irodalomban megtalálható eredmények jobb megértéséhez. Egyrészt részletesen levezettük a

függelék A., B. és C. részében az ide vonatkozó egyenleteket, amelyeket az irodalomban részletes levezetés nélkül lehet csak megtalálni. Különös figyelmet fordítottunk az ϵ_n és ϵ_t előjelek tárgyalására, ugyanis ezek az előjelek az irodalomban sok helyen összekeverednek, vagy megfelelnek róluk. Ugyancsak fontos megjegyezni az \bar{R} kritikus sugár létét a horizont alatt, lásd a (2.30) képletet. Felhívtuk a figyelmet arra, hogy egy héj Carter–Penrose diagramja az időkoordináták ugrása miatt szigorúan véve nem ábrázolható síkban egy összefüggő diagrammal, hanem a héj két oldalán lévő téridők különálló Carter–Penrose diagramjainak összeségeként tekinthető csak, amelyeket a perem (amely a héj világvonala) mentén lehet egymásnak megfeleltetni. Sok cikkben illusztrációként mégis szerepel egy síkban ábrázolt összefüggő diagram, azonban ezek torzított diagramok, mert az síkbeli „összeragasztás” miatt a fényszerű görbék nem lehetnek mindenhol 45 fokosak. Részletesen tárgyaltuk a kezdő feltételeket és a rájuk vonatkozó korlátozásokat. Számos állapotegyenlet típus esetén megadtuk a héj mozgás leírásához szükséges $m_r(r)$ tömegfüggvényt, többek között az irodalomban nem megtalálható törött lineáris és politróp állapotegyenletekre is. Összefoglaltuk a porból álló héjak mozgástípusait, amelyek több helyen is megtalálhatók az irodalomban, azonban itt analitikus formában megadtuk a kollapszus idejét marginálisan kötött esetben $m_c = 0$ központi tömeg esetén, mint a sajátidő mind a Minkowski idő szerint. További eredmény, hogy dimenziótlan változókat használva megadtuk a héj egyensúlyi helyzetét a paraméterterben, lásd az 5. ábrát. Felírtuk az Eddington–Finkelstein koordinátákra való áttérés képleteit, amely alkalmas arra, hogy a héj mozgását a horizonton keresztül kövessük. Végül a fejezet végén a newtoni közelítés esetén érvényes képleteket származtattuk nyomásból származó taggal együtt.

3. Héjak ütközése

Amikor héjak ütközését akarjuk leírni, feltételeznünk kell a héjak közötti kölcsönhatásról valamit. Az egyik határeset, amely egyben a legegyszerűbb feltételezés, ha minden kölcsönhatást elhanyagolunk, és feltesszük, hogy a héjak transzparensen áthatolnak egymáson. A gyakorlatban ez a helyzet, ha a kölcsönhatás erőssége elhanyagolható, és akkor is ha a héjat alkotó részecskék olyan ritkán helyezkednek el, hogy elhanyagolható a részecskék ütközésének a valószínűsége, azaz a hatáskeresztmetszet sokkal kisebb, mint az egy részecskére jutó átlagos terület azon a gömbfelületen, ahol az áthatolás megtörténik. Számos asztrofizikai esetben ez egy jó közelítés, akkor is ha porrészecskéket tekintünk a galaktikus térben, vagy például csillagokat egy gömbhalmazban vagy a galaxisban⁹. A másik határeset, ha a kölcsönhatás olyan erős, hogy a részecskéket egymáshoz köti, ekkor beszélünk teljesen rugalmatlan ütközésről. Ahhoz azonban, hogy a két ütköző héj teljesen összetapadjon, és egyetlen héjként mozogjon tovább, az is szükséges, hogy elég sűrűn helyezkedjenek el a részecskék az ütközés pillanatában ahhoz, hogy mindegyik részecske kölcsönhathasson. Általános esetben a részecskék fajtájától és a kölcsönhatásoktól függően kialakulhat az ütközés után több diszkrét héj, vagy akár folytonosan diszperzálhat is a részecskék eloszlása. Ez utóbbi eset már nem tárgyalható az infinitezimálisan vékony héjak formalizmusával. Az alábbiakban a két határesetet, a transzparens áthatolást és a teljesen rugalmatlan ütközés esetét fogjuk tárgyalni.

3.1. Transzparens áthatolás

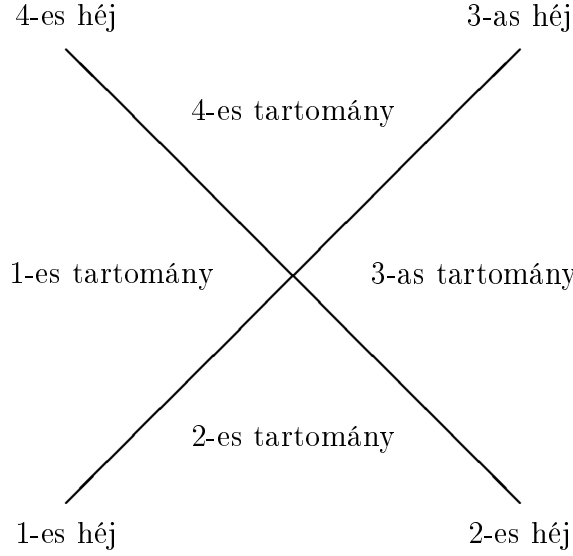
Ebben az alfejezetben gömbhéjak transzparens áthatolásának relativisztikus egyenleteit ismertetjük a Nakao, Daisuke és Ida által használt módszert összefoglalva [67]. Az ütközés előtti és utáni héjakat, illetve a héjak világlepedője által elválasztott téridő tartományokat indexeljük a 6. ábra szerint. A héjak és téridő tartományok indexelésére használjunk latin nagy betűket.

Minden egyes régióban a téridő gömbszimmetrikus, ezért a metrikát a K -val indexelt téridő tartományban az alábbi alakban vehetjük fel:

$$ds_K^2 = -f_K(r)dt^2 + f_K(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (3.66)$$

Ez a metrika elég általános ahhoz, hogy magába foglalja a Schwarzschild és de Sitter vákuum téridőket, vagy éppen a Reisner–Nordström elektrovákuumot.

⁹Természetesen gömbhéjakat csak gömbszimmetrikus galaxisok esetében alkalmazhatunk, vagyis csak elliptikus galaxisok vagy galaxismagok jöhetnek szóba.



6. ábra. Héjak *transparens áthatolásának* sematikus tér-idő diagramja. Az ábrán mindegyik egyenes időszerű világvonalat reprezentál. Az idő függőlegesen felfelé halad előre. Az ábra nem egy szigorúan vett Penrose–Carter diagram, csak a tartományok elnevezését illusztráljuk vele. Az 1-es tartomány a legbelső, a 3-as tartomány pedig a legkülső téridő tartományt jelöli.

Legyen a K -val indexelt héj nyugalmi tömege m_K , négyes sebessége pedig u_K^α . A négyes sebesség kontravariáns és kovariáns komponensei a héj világlepedőjét határoló külső (+) és belső (–) téridőkben

$$u_{K(\pm)}^\alpha = \left(\frac{dt_{K(\pm)}}{d\tau_K}, \frac{dr_K}{d\tau_K}, 0, 0 \right), \quad (3.67)$$

$$u_{K\alpha(\pm)} = \left(-f_{(\pm)} \frac{dt_{K(\pm)}}{d\tau_K}, \frac{dr_K/d\tau_K}{f_{(\pm)}}, 0, 0 \right), \quad (3.68)$$

ahol τ_K a K -val indexelt héj sajátideje, $t_{K(-)}$ és $t_{K(+)}$ a Schwarzschild időkoordináták rendre a belső és a külső határoló téridőben, r_K pedig a K . héj radiális koordinátája. Kihhasználva a négyessebességekre vonatkozó $u_{K\alpha} u_K^\alpha = -1$ feltételt, a négyessebességek komponenseinek segítségével felírhatjuk a héjak világlepedőjére merőleges egység vektorokat is, amelyek teljesítik az $n_K^\alpha u_{K\alpha} = 0$ ortogonalitási relációkat.

$$n_{K(\pm)}^\alpha = \left(\frac{dr_K/d\tau_K}{f_{(\pm)}}, f_{(\pm)} \frac{dt_{K(\pm)}}{d\tau_K}, 0, 0 \right), \quad (3.69)$$

$$n_{K\alpha(\pm)} = \left(-\frac{dr_K}{d\tau_K}, \frac{dt_{K(\pm)}}{d\tau_K}, 0, 0 \right). \quad (3.70)$$

Mivel a héjak kölcsönhatásmentesen hatolnak át egymáson, ezért feltételezzük, hogy a héjak sajáttömege változatlan marad, vagyis $m_1 = m_3$ és $m_2 = m_4$. Az ütközés helyén érvényes továbbá a négyesmomentum megmaradása az alábbi formában

$$m_1 u_1^a + m_2 u_2^a = m_3 u_3^a + m_4 u_4^a, \quad (3.71)$$

amely két skalár egyenletnek felel meg, tekintettel arra, hogy a gömszimmetria miatt csak az idő- és radiális komponens nem zérus. Előbbi az energia megmaradását, míg utóbbi a hármassimpulzus megmaradását fejezi ki az ütközés során. Newtoni elméletben ismert, hogy ennek az egyenletrendszernek a kimenő sebességekre két megoldása van: az egyik a rugalmas ütközés esete, míg a másik a triviális áthatolás, amikor a sebességek változatlanok maradnak. Mi ez utóbbinak keressük a relativisztikus megfelelőjét, amikor a négyessebességek folytonosan mennek át, azaz $u_1^a = u_3^a$ és $u_2^a = u_4^a$. Ez természetesen megoldása a (3.71) egyenletnek a kölcsönhatásmentes áthatolást kifejező $m_1 = m_3$ és $m_2 = m_4$ feltétellel együtt. Relativisztikus esetben azonban a négyessebességek változatlanságát kifejező kovariáns egyenletek koordináta reprezentációja korántsem triviális, ugyanis az egyes négyessebességek komponensei különböző téridő tartományok bázisában adóttak a (3.67) képlet szerint. Az alábbiakban azt mutatjuk meg, hogyan lehet azonos bázisban felírni őket. A továbbiakban minden egyenletet az r_c ütközési sugárnál tekintünk, anélkül, hogy ezt jelölnénk.

Az $u_1^a = u_3^a$ egyenlet komponenseinek kiírásához válasszuk a legkülső 3-as tartomány bázisát, az $u_2^a = u_4^a$ egyenlethez pedig a legbelső 1-es tartomány bázisát. Mivel u_3^a a 3-as tartomány bázisában adott a (3.67) képlet alapján (+) indexet választva, u_4^a pedig az 1-es tartomány bázisában (–) indexet választva, ezért a feladatunk az, hogy u_1^a komponenseit is felírjuk a 3-as tartomány bázisában, u_2^a komponenseit pedig az 1-es tartomány bázisában. Ehhez előbb az u_1^a és u_2^a vektorokat felírjuk az alábbi lineárkombinációkba, kihasználva az u_2^a és n_2^a , illetve az u_1^a és n_1^a vektorok ortogonalitását:

$$u_1^a = -u_1^b u_{2b} u_2^a + u_1^b n_{2b} n_2^a, \quad (3.72)$$

$$u_2^a = -u_1^b u_{2b} u_1^a + u_2^b n_{1b} n_1^a. \quad (3.73)$$

A lineárkombinációkban szereplő együtthatók skalár számok, melyeket lényegtelen, hogy melyik bázisban számolunk ki, így használhatjuk a legkényezefekvőbbet, azaz a 2-es régiót, amely az 1-es és a 2-es héjjal is határos. Felhasználva a (3.67), a (3.68) és a (3.70) egyenleteket

$$u_1^b u_{2b} = -f_2 \frac{dt_{1(+)} dt_{2(-)}}{d\tau_1 d\tau_2} + f_2^{-1} \frac{dr_1 dr_2}{d\tau_1 d\tau_2}, \quad (3.74)$$

$$u_1^b n_{2b} = -u_2^b n_{1b} = -\frac{dt_{1(+)} dr_2}{d\tau_1 d\tau_2} + \frac{dt_{2(-)} dr_1}{d\tau_2 d\tau_1}. \quad (3.75)$$

A sajátidő szerinti időkoordináta deriváltakat (2.31) alapján az alábbi formában írhatjuk $J = 1, 2$ esetben

$$\frac{dt_{J(-)}}{d\tau_J} = \frac{g_J + h_J}{m_J f_J}, \quad (3.76)$$

$$\frac{dt_{J(+)}}{d\tau_J} = \frac{g_J - h_J}{m_J f_{J+1}}, \quad (3.77)$$

ahol a J -vel indexelt héj gravitációs tömege g_J , és bevezettük a $h_J = m_J^2/(2r_c)$ jelölést. Ezeket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$u_1^b u_{2b} = \frac{p_1 p_2 - e_1 e_2}{m_1 m_2 f_2}, \quad (3.78)$$

$$u_1^b n_{2b} = \frac{p_1 e_2 - p_2 e_1}{m_1 m_2 f_2} = -u_2^b n_{1b}, \quad (3.79)$$

ahol $p_K = m_K(dr_K/d\tau_K)$ a relativisztikus hármassimpulzus, továbbá bevezettük az $e_1 = g_1 - h_1$ és $e_2 = g_2 + h_2$ jelöléseket. A (2.28) mozgásegyenlet szerint az e_1 és e_2 mennyiségekre fennáll az alábbi összefüggés

$$e_J^2 = p_J^2 + m_J^2 f_2 \quad (3.80)$$

A (3.78) és a (3.79) skalár szorzatokat felhasználva a (3.72) kifejezés alapján a 3-as tartomány bázisban felírhatjuk az $u_3^a = u_1^a$ egyenletet, amelynek az idő komponensére az alábbi egyenletet kapjuk az ütközés helyén

$$\begin{aligned} \frac{dt_{3(+)}}{d\tau_3} &= -u_1^b u_{2b} \left(\frac{dt_{2(+)}}{d\tau_2} \right) + u_1^b n_{2b} \left(\frac{1}{f_3} \frac{dr_2}{d\tau_2} \right) = \\ &= -u_1^b u_{2b} \frac{e_2 - 2h_2}{m_2 f_3} + u_1^b n_{2b} \frac{p_2}{m_2 f_3} = \\ &= \frac{(e_1 e_2 - p_1 p_2) e_2 + (p_1 e_2 - p_2 e_1) p_2}{m_1 m_2^2 f_2 f_3} + \frac{2h_2}{m_2 f_3} u_1^b u_{2b} = \\ &= \frac{e_1}{m_1 f_3} + \frac{m_2}{r_c f_3} u_1^b u_{2b} = \frac{1}{m_1 f_3} \left(e_1 + \frac{m_1 m_2}{r_c} u_1^b u_{2b} \right) \end{aligned} \quad (3.81)$$

Az átalakítások során kihasználtuk a (3.80) összefüggést. Az $u_3^a = u_1^a$ egyenlet radiális komponense

$$\begin{aligned}
\frac{dr_3}{d\tau_3} &= -u_1^b u_{2b} \left(\frac{dr_2}{d\tau_2} \right) + u_1^b n_{2b} \left(f_3 \frac{dt_{2(+)}}{d\tau_2} \right) = \\
&= -u_1^b u_{2b} \frac{p_2}{m_2} + u_1^b n_{2b} \frac{e_2 - 2h_2}{m_2} = \\
&= \frac{(e_1 e_2 - p_1 p_2) p_2 + (p_1 e_2 - p_2 e_1) e_2}{m_1 m_2^2 f_2} - \frac{2h_2}{m_2} u_1^a n_{2a} = \\
&= \frac{1}{m_1} \left(p_1 - \frac{m_1 m_2}{r_c} u_1^a n_{2a} \right) \tag{3.82}
\end{aligned}$$

Teljesen hasonló módon kapjuk az $u_4^a = u_2^a$ egyenlet nem zérus komponenseire, hogy

$$\frac{dt_{4(-)}}{d\tau_4} = \frac{1}{m_2 f_1} \left(e_2 - \frac{m_1 m_2}{r_c} u_1^b u_{2b} \right) \tag{3.83}$$

$$\frac{dr_4}{d\tau_4} = \frac{1}{m_2} \left(p_2 - \frac{m_1 m_2}{r_c} u_1^a n_{2a} \right) \tag{3.84}$$

Kihasználva, hogy $h_3 = h_1$ és $h_4 = h_2$, eredményeinket az alábbi formában foglalhatjuk össze.

$$p_3 = p_1 + \Delta p, \tag{3.85}$$

$$p_4 = p_2 + \Delta p, \tag{3.86}$$

$$g_3 = g_1 - \Delta g, \tag{3.87}$$

$$g_4 = g_2 + \Delta g, \tag{3.88}$$

ahol

$$\Delta p = -\frac{m_1 m_2}{r_c} u_1^a n_{2a} = \frac{(g_1 - h_1) p_2 - (g_2 + h_2) p_1}{r_c - 2(g_0 + g_1)}, \tag{3.89}$$

$$\Delta g = -\frac{m_1 m_2}{r_c} u_1^a u_{2a}, \tag{3.90}$$

A fenti összefüggésekben g_0 -al jelöltük a központi tömeget, vagyis m_{c1} -et. A (3.90) belátható, ha a (3.83) és a (3.82) komponenseket összehasonlítjuk a kifejezéssel. Mivel $u_1^a u_{2a} < 0$ ezért Δg mindig pozitív. Megjegyezzük, hogy

ütközés csak akkor történhet, ha az 1-es és 2-es héjak közelednek egymáshoz. Ennek feltétele, az hogy, $u_1^a n_{2a} > 0$ ezért Δp mindig negatív.¹⁰ Érdeemes megjegyezni, hogy Δp és Δg között fennáll az alábbi összefüggés

$$\Delta g^2 - \Delta p^2 = 4h_1 h_2 = \frac{m_1^2 m_2^2}{r_c^2}. \quad (3.91)$$

Vegyük észre, hogy Δp lényegében az általános relativisztikus korrekció a newtoni esethez képest.¹¹

Végül megjegyezzük, hogy a dinamikai leírás folytatásához nem elég az ütközés utáni sebességek kiszámítása, de meg kell adnunk azt is, hogy az ütközés után milyen állapotegyenlet írja le a héjakat alkotó anyagok viselkedését, ez ugyanis meghatározza a dinamikai fejlődést az ütközés után. Transzparens áthatolás esetén azonban kölcsönhatás hiányában joggal feltételezhetjük, hogy a héjak állapotegyenlete változatlan marad, vagyis a 3-as héj állapotegyenlete az 1-es héj állapotegyenletével, a 4-es héj állapotegyenlete pedig a 2-es héj állapotegyenletével lesz megegyező.

3.2. Teljesen rugalmatlan ütközés

Ebben az alfejezetben gömbhéjak teljesen rugalmatlan ütközésének relativisztikus egyenleteit vezetjük le. Hasonló eljárást alkalmazunk rugalmatlan ütközésre, mint a Nakao, Daisuke és Ida által transzparens áthatolásra kidolgozott módszer, amelyet az előző alfejezetben részleteztünk. Az alábbi eredmények a *Probing the stability of gravastars by dropping dust shells onto them* című cikk függelékében közlésre kerültek [113]. A héjak és téridő tartományok indexelésére a 7. ábra jelöléseit használjuk.

Teljesen rugalmatlan ütközés esetén a négyesimpulzus megmaradását kifejező egyenlet

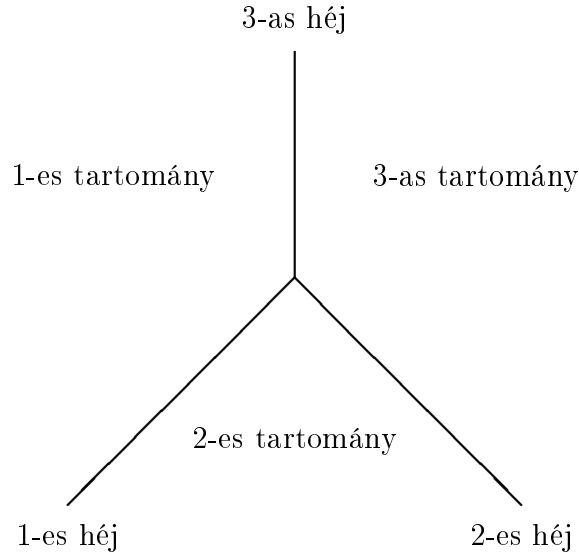
$$m_1 u_1^a + m_2 u_2^a = m_3 u_3^a. \quad (3.92)$$

Két meghatározandó ismeretlenünk van: a kimenő sebesség és a kialakuló új héj m_3 saját tömege. Mivel az ütközés rugalmatlan, ezért a kinetikus energia egy része kötési energiává konvertálódik, vagyis $m_3 \neq m_1 + m_2$.

Ahhoz, hogy kifejtsük a (3.92) egyenletet, az egyenletben szereplő mennyiségeket közös bázisban kell felírunk. A továbbiakban a belső 1-es tartományt

¹⁰A hármasmomentumok az ütközések során mindig csökkennek, ez azonban nem mond ellent az impulzus megmaradásának, hiszen a szóban forgó impulzusok különböző bázisban felírt komponensek. Ez az effektus az ún. Ricci-fókuszálás, bővebben lásd [67].

¹¹Megjegyezzük, hogy ellenőrizhető a formulák alapján, hogy három héj egy pontban történő transzparens ütközése esetén a kimenetel független az ütközések sorrendjétől.



7. ábra. Héjak teljesen rugalmatlan ütközésének sematikus téridő diagramja. A vonalak időszerű világvonalakat reprezentálnak. Az idő függőlegesen felfelé halad előre. Az 1-es tartomány a legbelső, a 3-as tartomány pedig a legkülső téridő tartományt jelöli.

választjuk közös rendszernek. Mivel az 1-es tartománnyal az 1-es és a 3-as héj szomszédos, ezért u_1^a és u_3^a kifejtése automatikus a (3.67) képlet alapján, amelyben mindkét esetben a $(-)$ indexet használjuk. u_2^a felírásához tekintsük az alábbi lineáris kombináció szerinti kifejtést

$$u_2^a = -(u_2^b u_{1b}) u_1^a + (u_2^b n_{1b}) n_1^a. \quad (3.93)$$

Az itt szereplő skalár mennyiségek megegyeznek a korábban számolt a (3.78) és a (3.79) kifejezésekkel, amelyeket az alábbi formában használunk

$$u_2^b u_{1b} = \frac{p_1 p_2 - (g_1 - h_1)(g_2 + h_2)}{m_1 m_2 f_2}, \quad (3.94)$$

$$u_2^b n_{1b} = \frac{(g_1 - h_1)p_2 - (g_2 + h_2)p_1}{m_1 m_2 f_2}. \quad (3.95)$$

A lineárkombinációban szereplő u_1^a és n_1^a vektorok komponensei az 1-es tartományhoz tartozó bázisban a (3.67) és a (3.69) egyenletek alapján, felhasználva az időderiváltakra vonatkozó (2.31) kifejezést

$$u_1^\alpha = \left(\frac{g_1 + h_1}{m_1 f_1}, \frac{p_1}{m_1}, 0, 0 \right), \quad (3.96)$$

$$n_1^\alpha = \left(\frac{p_1}{m_1 f_1}, \frac{g_1 + h_1}{m_1}, 0, 0 \right). \quad (3.97)$$

A skalárszorzatokat és a fenti egyenleteket visszahelyettesítve a (3.93) lineárkombinációba, némi átrendezés után kapjuk komponensenként az alábbi két egyenletet u_2^a nem zérus komponenseire

$$u_2^t = -\frac{(g_2 + h_2)(p_1^2 - g_1^2 + h_1^2) + 2p_1 h_1 p_2}{m_1^2 m_2 f_1 f_2}, \quad (3.98)$$

$$u_2^r = -\frac{p_2(p_1^2 - g_1^2 + h_1^2) + 2p_1 h_1 (g_2 + h_2)}{m_1^2 m_2 f_2}, \quad (3.99)$$

A fenti komponenseket beírva az impulzus megmaradást kifejező a (3.92) egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$h_3 - g_3 = h_1 - g_1 - \frac{(g_2 + h_2)(p_1^2 - g_1^2 + h_1^2) + 2p_1 h_1 p_2}{m_1^2 f_2}, \quad (3.100)$$

$$p_3 = p_1 - \frac{p_2(p_1^2 - g_1^2 + h_1^2) + 2p_1 h_1 (g_2 + h_2)}{m_1^2 f_2}, \quad (3.101)$$

ahol g_3 kiküszöbölhető a (3.100) egyenletből, felhasználva a $g_3 = g_1 + g_2$ összefüggést, és az ismeretlen új tömeg az $m_3 = \sqrt{2r_c h_3}$ összefüggés alapján számolható.

Érdemes megjegyezni, hogy az állapotegyenletre most se volt szükség, azonban a mozgás további leírásához, rugalmatlan ütközés esetében – amikor a két héj anyaga lényegében egy új héjat alkot ütközés után – valamilyen feltételezéssel kell élnünk az új állapotegyenletre vonatkozóan.¹²

Végül alkalmazzuk a rugalmatlan ütközésre kapott eredményeinket arra az esetre, amikor az egyik héj nyugalomban van, azaz $p_1 = 0$.¹³ Ekkor (3.101) alapján

$$m_3 v_3 = m_2 v_2 \frac{g_1^2 - h_1^2}{m_1^2 f_2}. \quad (3.102)$$

¹²Megjegyezzük, hogy ellenőrizhető, hogy az azonos időben egy helyen történő szimultán hármas ütközések esetében a végeredmény független az ütközések sorrendjétől.

¹³Erre lesz majd szükségünk a gravastarok stabilitásának vizsgálatában, lásd az 5.3. alfejezetben.

3.3. Összefoglalás

Ebben a fejezetben összefoglalásra kerültek a transzparens ütközésre vonatkozó egyenletek amelyek nem új eredmények, attól eltekintve, hogy a levezetés kicsit részletesebb, mint az idézett [67] cikkben. A rugalmatlan ütközés egyenletei és fenti levezetésük azonban nem szerepeltek még az irodalomban. Legfőbb eredmények tehát a (3.100) és a (3.101) egyenletek.

4. Héjrendszerek vizsgálata

4.1. Két héj mozgása

A 2. fejezetben megadtuk egy héj mozgásának leírását, különféle időkoordinátákban. Nyomon tudjuk követni a héj mozgását a sajátidejének vagy bármelyik határoló Schwarzschild téridő idejének függvényében. Ahhoz azonban, hogy két héj egymáshoz viszonyított mozgását le tudjuk írni, szükség van egy közös (lehetőleg monoton) paraméterre, amelynek függvényében mindkét héj mozgása nyomon követhető. A közös paraméternek legtermészetesebb módon a két héj közötti téridő valamely időkoordinátája választandó (Schwarzschild vagy Eddington).¹⁴ Egy ilyen közös paraméter választása lényegében egyfajta szinkronizációnak felel meg, vagyis az idő paraméter definiálásával egyidejűleg egyidejűséget is definiálunk a két héj között. Ebből adódóan különböző idő paraméterek szerint ábrázolva más és más a héjak relatív mozgása. Ütközés vagy áthatolás esetén viszont a találkozás helye nem függhet attól, hogy milyen idő paramétert választottunk a leíráshoz. Megjegyezzük továbbá, hogy minekutána az egyidejűséget definiáltuk, áttérhetünk bármilyen más monoton változóra is, például valamelyik héj sajátidejének függvényében is ábrázolhatjuk a héjak mozgását, vagy valamelyik héj sugarának a függvényében, ez utóbbi is lehet monoton, ha például a kezdő adatokból feltételezhető, hogy kollapszus történik.

Most tegyük fel, hogy a rendszerünk N darab héjat tartalmaz. $N > 2$ héj leírása esetén is választanunk kellene egy közös paramétert, azonban két héj közötti téridő ideje csak a két szomszédos héj szinkronizációjához alkalmazható közvetlenül. Egyik téridő ideje se alkalmas arra, hogy az összes héj mozgását automatikusan annak függvényében írjuk le. Viszont az összes héjat szinkronizálhatjuk, ha az egymással szomszédos héjakat rendre páronként szinkronizáljuk. Az ily módon definiált szinkronizálás a teljes rendszerre ugyancsak függ attól, hogy Schwarzschild vagy Eddington koordinátákat használunk. Ugyanakkor az esetleges ütközések helye továbbra is független kell legyen ettől a választástól, hiszen két héj találkozásakor egy helyen és egy időben vannak az ütköző héjak minden vonatkoztatási rendszerben.

4.2. Kezdő adatok

Egy héjrendszer kezdő adataihoz tartozik a központi tömeg paraméter, amelyet $m_{\text{közp}}$ -el jelölünk, és az egyes héjak kezdő adatainak összessége:

¹⁴Fontos megjegyezni, hogy a két héj sajátidejei különböznek egymástól és különböző módon telnek. Ezt nem szabad elfelejteni, [68] például ezt figyelmen kívül hagyta, és ezért teljesen rosszak az eredményei a VII. fejezetben, amelyek az ütközés helyére vonatkoznak.

$m_0^{(i)}, r_0^{(i)}, v_0^{(i)}$, ahol i 1-től fut N -ig és

$$m_0^{(i)} = m_r^{(i)}(r) \Big|_{r=r_0^{(i)}} \quad (4.103)$$

$$v_0^{(i)} = \frac{dr^{(i)}}{d\tau^{(i)}} \Big|_{r=r_0^{(i)}} \quad (4.104)$$

Azt a konvenciót használjuk, hogy $r_0^{(i)} < r_0^{(j)}$ ha $i < j$, vagyis a héjakat belülről kifelé sorrendbe számozzuk. Így belülről kifelé rekurzíve ki tudjuk számolni, hogy az egyes héjak mekkora centrális $m_c^{(i)}$ tömeget éreznek, és mekkora az egyes héjak gravitációs tömege. Előbbi kiszámolásához használjuk, hogy $m_c^{(1)} = m_{\text{közp}}$ és $i > 2$ esetén $m_c^{(i)} = m_c^{(i-1)} + m_g^{(i-1)}$, a gravitációs tömeget pedig a (2.48) képlet alapján kapjuk. Ezután $m_c^{(i)}$ értékeinek ismeretében azt is ellenőriznünk kell, hogy az egyes héjak kezdő feltételeire teljesülnek-e a szükséges (2.49) feltételek.

A rendszer kezdő feltételeihez tartozik még az is, hogy megadjuk az egyes héjak állapotegyenleteit, illetve azt, hogy esetleges ütközéseik esetén milyen feltételezéssel élünk az ütközésre vonatkozóan, illetve meg kell adnunk az új állapotegyenleteket ütközés után.

4.3. Numerikus algoritmus

Doktori munkám egyik fő eleme a C++ programkód, amelynek futtatásaiból ebben a fejezetben ismertetünk numerikus eredményeket. A numerikus program csomag előnye, hogy C++ nyelven íródott, ezért gyors. Ezt azért érdemes megjegyezni, mert létezik a héjformalizmus kezelésére szolgáló algebrai programcsomag Maple nyelven, de az korántsem alkalmas a gyors numerikus szimulációkhoz. További előnye az általam kifejlesztett programcsomagnak, hogy objektum orientált nyelven íródott, könnyen bővíthető és alakítható a felhasználó igényeinek megfelelően. a forráskód szabadon letölthető a <http://\sss.rmki.kfki.hu> helyről. A programozók számára, a forráskód kommentekkel van ellátva, ebben az alfejezetben csak vázlatosan foglaljuk össze, hogy a kidolgozott programkód milyen algoritmus szerint végzi a héjrendszer szimulációját. Tekintsük először külön egy héj mozgásának leírását. Miután megadtuk a szóban forgó héj kezdő adatait, amíg nem ütközik a héj egy szomszédos héjjal, addig a kezdő paraméterek és az állapotegyenlet alapján m_r meghatározható a sugár függvényében. Ha az állapotegyenlet lineáris vagy törött lineáris, akkor m_r analitikusan számolható, ha politróp, akkor az implicit reláció miatt csak numerikusan (egy gyökkeresési algoritmussal), ha tetszőlegesen felhasználó által definiált függvény, akkor numerikus integrálással

számol a program. A mozgásegyenlet alapján ezután a héj sajátidő szerinti sebességének abszolút értéke $dr/d\tau$ ugyancsak meghatározható a sugár függvényében. A sebesség iránya a kezdő adatok alapján kezdetben adott, az evolúció során pedig nem változik, amíg nincs fordulópont a mozgásban. Bármelyik szomszédos tartomány Schwarzschild idő koordinátáit használva megadhatók a $dt_{\pm}/d\tau$ idő deriváltak is. Ezek után a láncszabályt alkalmazva a sebességek is megadhatók bármelyik szomszédos tartománybeli idő szerint

$$\frac{dr}{dt_{\pm}} = \frac{dr}{d\tau} \left(\frac{dt_{\pm}}{d\tau} \right)^{-1} \quad (4.105)$$

A héjak mozgásának fejlesztéséhez belülről kifelé haladunk és rendre léptetjük mindegyik héjat úgy, hogy a szomszédos héjaknak páronként azonos idő teljen el a köztes téridőben. Először a legbelső héjat léptetjük, valamilyen paraméter szerint, például saját idejében teszünk egy lépésközt. Ezt követően mindig az előző héj külső téridőbeli idejét vesszük lépésköznek, és a következő héjat a belső időben léptetjük ezzel a lépésközzel. A numerikus lépésközök számolásához 4-ed rendű Runge-kutta módszert használunk. Ha valamelyik héj eléri dinamikus tartománya szélét, vagyis a sebesség zérussá válik, (ezt tipikusan úgy vesszük észre, hogy a lépésközt nem tudjuk megtenni, mert az adott sugárhoz tartozó sebesség komplex lenne) akkor a sebesség előjelét megváltoztatjuk, és úgy folytatjuk az evolúciót (természetesen alkalmazunk egy interpolációs korrekciót, és pontosan kiszámoljuk a visszafordulás helyét egy a sebesség négyzetére vonatkozó gyökkeresési algoritmussal).

Ha a mozgás fejlesztése során a héjak sugarainak nagyság szerinti sorrendjében egy lépés után változás állna be, akkor azt jelenti, hogy valahol ütközés történt. Ekkor lineáris approximációval meghatározzuk az ütközés pontos helyét, és az ütközés fajtája szerint meghatározzuk a kimenő paramétereket. Ha teljesen rugalmatlan ütközés történik, akkor a héjak száma csökken a rendszerben. Ha egy héj eléri a központi szingularitást, akkor a gravitációs tömegével megnöveljük a legbelső téridő tömegparaméterét, és egyel kevesebb héjjal folytatjuk a rendszer evolúcióját, ha az tartalmaz még nem zérus sugarú héjat. A program a kimenő adat file-ba kiírja egy léptetés során a héjak sugarait, és opcionálisan a sajátidőket, illetve a legbelső és legkülső idő paramétert, amíg a horizonton nem megyünk át. Megjegyezzük, hogy rugalmatlan ütközés esetén a sajátidő nullpontját nem választhatjuk úgy, hogy folytonosan menjen át mindkét héj saját idejével.

4.4. Szimulációk

Egymás közeléből közel azonos kezdőfeltételekkel indított vékony héjak rendszerével a vastag héjak viselkedését próbálhatjuk meg közelíteni. Ez volt

a célja az egyetlen cikknek, amelyben héjak teljes evolúcióját vizsgálták [87], ütközések figyelembe vételével és a horizont alatti mozgásleírással. Az említett cikkben azonban csak két héj mozgását tudták vizsgálni, így a vastag héj közelítése nem volt komolyan vehető. A doktori munka keretében kifejlesztett C++ program kód segítségével, ennél jóval nagyobb számú héjat tudunk kezelni. Először azonban, mielőtt nagy számú héjak szimulációinak eredményeit közölnénk, kicsit kevesebb számú héj esetében vizsgáljuk meg ilyen héjrendszerek dinamikájának tulajdonságait kicsit részletesebben.

4.4.1. Bevezető példa

Ebben a részben az a célunk, hogy héjrendszerek dinamikájának alapvető tulajdonságait tanulmányozzuk. Nem nagyon sok héjból álló rendszert vizsgálunk, hogy jól látható legyen a szimulációkban az egyes héjak mozgása. Az a célunk, hogy megvizsgáljuk, hogyan befolyásolják a dinamikát egyes kezdő adatok és paraméterek, illetve azok megváltozása. Ezért azt az utat követjük, hogy választunk egy referencia szimulációt (a hozzá tartozó kezdő adatokkal), és a többi szimulációban egyszerre mindig csak egyféle kezdő adatot változtatunk meg a referenciához képest, hogy össze tudjuk hasonlítani az eredményt a referencia szimulációval. Az összehasonlító ábrákat az 56–57. oldalakon láthatjuk.

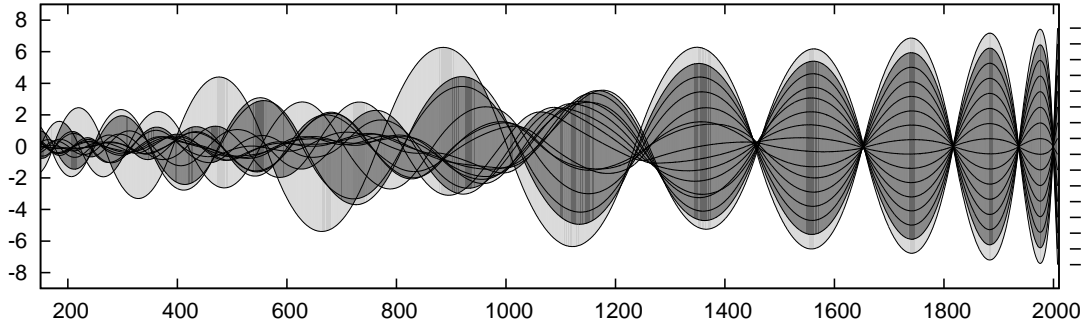
A referencia szimulációt $N = 16$ darab radiálisan egyenletesen elosztott egyforma tömegű héj alkotja. A rendszer teljes tömege 72 egység, és ez az összes szimuláció esetében ugyanaz lesz. Egyedül az (e) ábrán láthatunk eltérő tömegű héjakat. A referencia szimuláció héjainak kezdő sugarai $r_0^{(i)} = 1999 + i$, ahol i fut 1-től 16-ig, ez az, amit a továbbiakban úgy hívunk, hogy egyenletes eloszlás. Megjegyezzük, hogy relatíve csak kicsit különböznek a kezdő sugarak, de emiatt az egyes héjak felületi energia sűrűsége is picit különbözik egyenlő tömegek esetén. A héjakat nyugalomból indítjuk minden esetben, tehát $v_0^{(i)} = 0$ minden i indexre. Minden esetben por alkotja a héjakat, kivéve a (d) ábrát, ahol homogén lineáris állapotegyenletet feltételezünk.

Nézzük most pontosan mit láthatunk az 56–57. oldalakon található ábrákon. Az ábrákon az $\bar{r} = \sum_{i=1}^{16} r^{(i)} / 16$ átlag sugár függvényében van ábrázolva az átlagtól való eltérés. Eltérő tömegű héjak esetén pedig \bar{r} súlyozott átlagot jelöl. Tehát úgymond a vastag héj tömegközéppontjához képesti belső mozgást láthatjuk. Mivel kollapszáló rendszereket láthatunk az ábrákon, ezért az átlagsugár időben csökken, és így az idő iránya a szokásostól eltérően jobbról balra halad az ábrákon. A héjak a grafikonok függőleges metszete mentén vannak szinkronizálva Schwarzschild idő szerint. A mozgást ezekben a példákban csak addig vizsgáljuk, amíg a Schwarzschild idő ezt engedi, azaz amíg valamely tartomány határával el nem érjük az adott tartomány

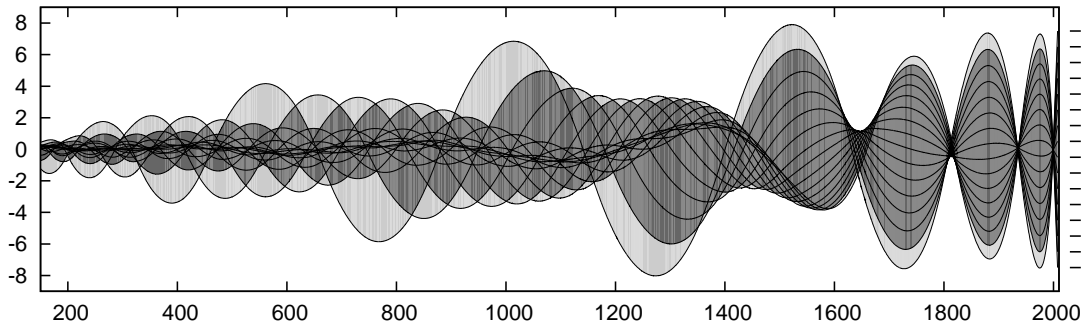
tömegparaméteréhez tartozó Schwarzschild-sugarat. Megjegyezzük, hogy az ábrákon az időbeli lefolyás jobbról balra történik. A héjak kezdő sugarai az ábrák jobb szélén kicsi vízszintes rovátkákkal vannak jelölve. Egyenlő tömegű héjakat azonos vonalvastagság reprezentálja az ábrákon. A rendszer burkolóján belüli részt szürkére színeztük, és a legkülső héjtól a második héjig tartó tartományt pedig világosabb szürkével, így jobban látszik a rendszer sűrűségeloszlása. Az alábbiakban részletesen ismertetjük az egyes ábrák esetén a lényeges paramétereket.

- (a) Az első ábrán a referencia rendszer szimulációja látható newtoni közelítésben, és a héjak globális newtoni idő szerint vannak szinkronizálva. Minden más ábrán relativisztikus dinamikai fejlődést ábrázoltunk.
- (b) A második ábrán a referencia rendszer szimulációja látható relativisztikus dinamika szerinti időfejlődéssel. A héjak Schwarzschild idő szerint vannak szinkronizálva.
- (c) Ezen az ábrán ugyancsak egy egyenletes eloszlású rendszer relativisztikus dinamikai fejlődése látható, de a héjat a korábbi 16 helyett 64 részre osztottuk, azaz egy héj tömege $72/64$. A héjrendszer teljes szélessége ugyanakkora, vagyis a legbelső héj kezdő sugara $r_0^{(1)} = 2000$ és a legkülső héj sugara $r_0^{(64)} = 2015$.
- (d) Ezen az ábrán a referencia rendszer szimulációja látható relativisztikus dinamikai szerint, de azt feltételezzük, hogy por helyett a héjak állapotegyenlete homogén lineáris, ugyanazzal a $w = 0.006$ paraméterrel. A w paraméter értékét úgy állítottuk be, hogy megfelel egy virializált rendszerrel való hasonlóságnak, lásd a D. függelékét.
- (e) Ehhez az ábrához centrált eloszlású rendszer tartozik, ahol a tömegeloszlás a következő módon jellemezhető: $m_0^{(i)} = i$ és $m_0^{(8+i)} = 9 - i$ ahol i fut 1-től 8-ig. Az ábrán minden héj a saját tömegével lineárisan arányos vonalvastagsággal van ábrázolva.
- (f) Ezen az ábrán is centralizált eloszlást láthatunk, de nem a tömegeloszlást változtattuk meg, hanem a kezdő pozíciókat, amit láthatunk az ábra jobb oldalán lévő rovátkákon is.
- (g,h) Az utolsó két ábrán véletlenszerű, de egyenletes eloszlású rendszereket láthatunk. A kezdő pozíciók az ábra jobb oldalán láthatók. $r_0^{(1)} = 2000$, $r_0^{(16)} = 2015$. A középső 14 héj kezdő sugara pedig a $[2000, 2015]$ intervallumból lett véletlenszerűen választva egyenletes eloszlás szerint.

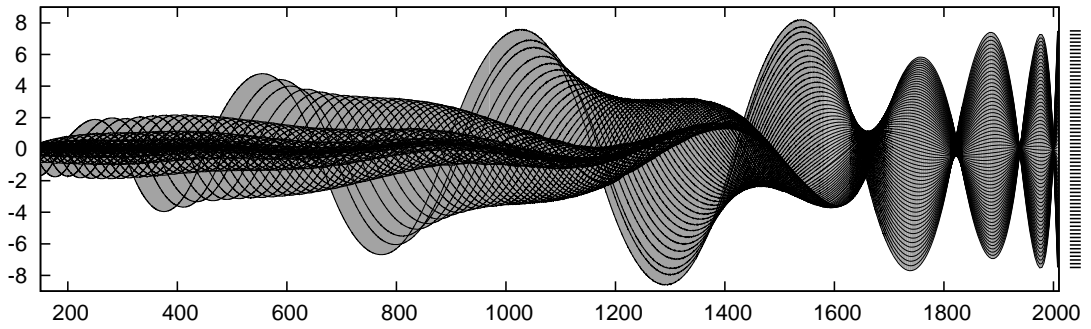
(a) egyenletes eloszlású hégrendszer (newtoni dinamika)



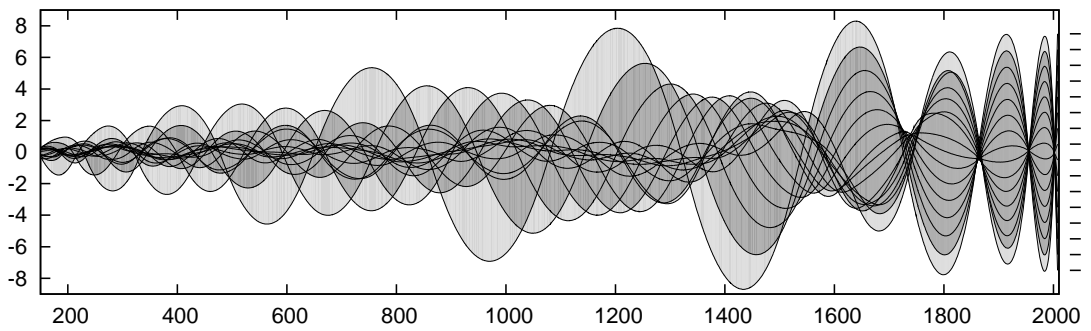
(b) egyenletes eloszlású hégrendszer (relativisztikus dinamika)



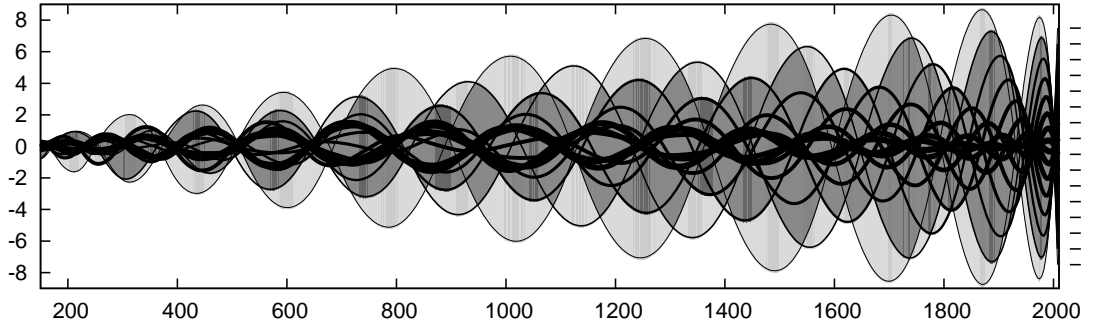
(c) egyenletes eloszlású hégrendszer (relativisztikus dinamika)



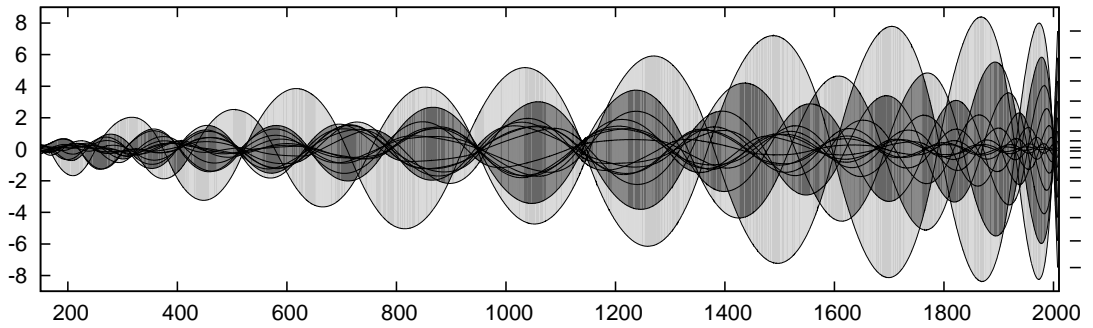
(d) lineáris állapotegyenlet $w=0.006$ (relativisztikus dinamika)



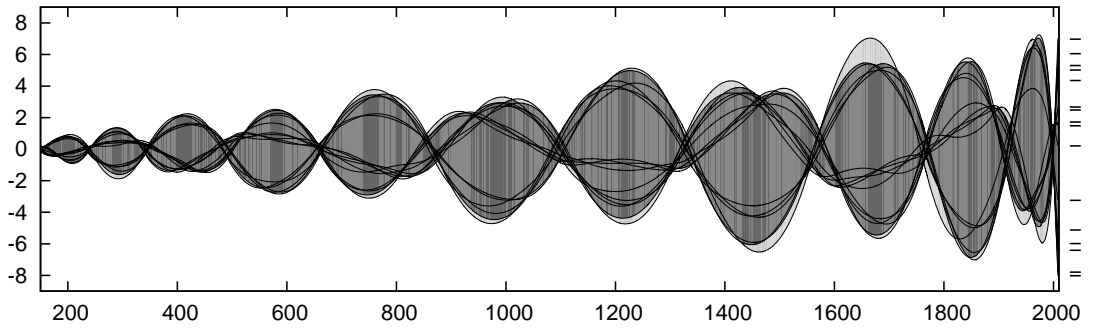
(e) centralizált tömegeloszlású héjrendszer (relativisztikus dinamika)



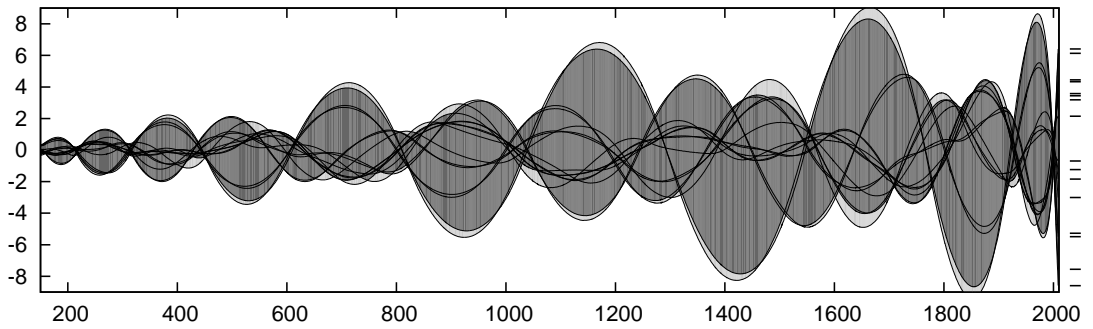
(f) centralizált szimmetrikus eloszlású héjrendszer (relativisztikus dinamika)

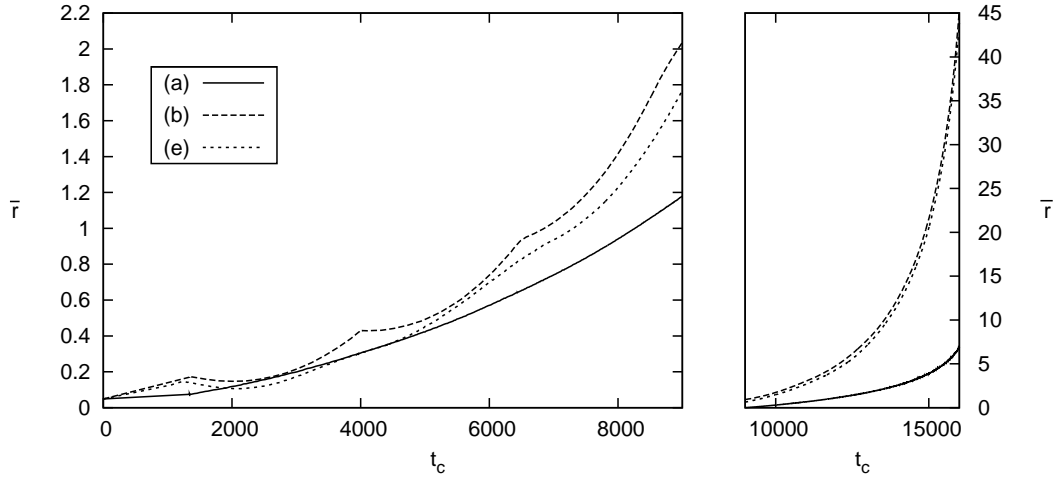


(g) egyenletes véletlen eloszlású héjrendszer (relativisztikus dinamika)



(h) egyenletes véletlen eloszlású héjrendszer (relativisztikus dinamika)





8. ábra. Héjrendszer radiális „tömegközéppontjának” mozgása. A fenti ábrán az (a), (b) és (e) rendszer közép sugarának relatív változása van ábrázolva a legbelső Minkowski tartomány idejének függvényében, amelyet t_c -vel jelöltünk. A referencia annak a héjnak a mozgása, ami akkor alakulna ki, ha a az ütközések nem transzparenssek lennének, hanem teljesen rugalmatlanok, és így az első fókuszpont után az összes héj összeütközne, és egy héjként mozogna tovább. Az eltérés az egyes rendszerek között elég kicsi a héjrendszer szélességéhez viszonyítva, csak a horizont felé (az ábra jobb széle) kezd jelentősebben nőni az eltérés.

Az 56–57. oldalon látható ábrák összehasonlításából sokmindent megállapíthatunk. Először azonban megemlítjük, hogy ismert tény, miszerint folytonos modellekben is előfordul az ún. shell-crossing szingularitás névvel jellemzett jelenség, amikor két szomszédos réteg átmegy egymáson. Folytonos modellben, amikor két réteg átmegy egymáson, akkor a közöttük lévő rétegek már korábban keresztezték egymást, vagy egyszerre fókuszálódnak, és így végtelen nagy felületi sűrűség alakul ki. A fenti ábrákon héjrendszert használva is azt látjuk, hogy az egymás közeléből nyugalomból indított héjak nemcsak ütköznek, hanem a szomszédos rétegek össze is torlódnak és szinte egy pontban egyszerre ütköznek egymással. Megjegyezzük, hogy minél több héjat használunk annál inkább egy pontba fókuszálódnak, ahogy a (c) ábrán is látszik. A shell-crossing szingularitást néhány helyen akusztikus szingularitásnak is nevezik, a fenti tulajdonság miatt ez az utóbbi találóbb elnevezés. A fenti ábrákon végignézve azt tapasztalhatjuk szembetűnően, hogy a referencia rendszerhez képest a különböző eltérések a kezdő adatokban a szimpla egyenes eloszláshoz képest minden esetben kivétel nélkül diszperziót okoznak, abban az értelemben, hogy rendezetlenebb lesz az eloszlás, kiszélesedik,

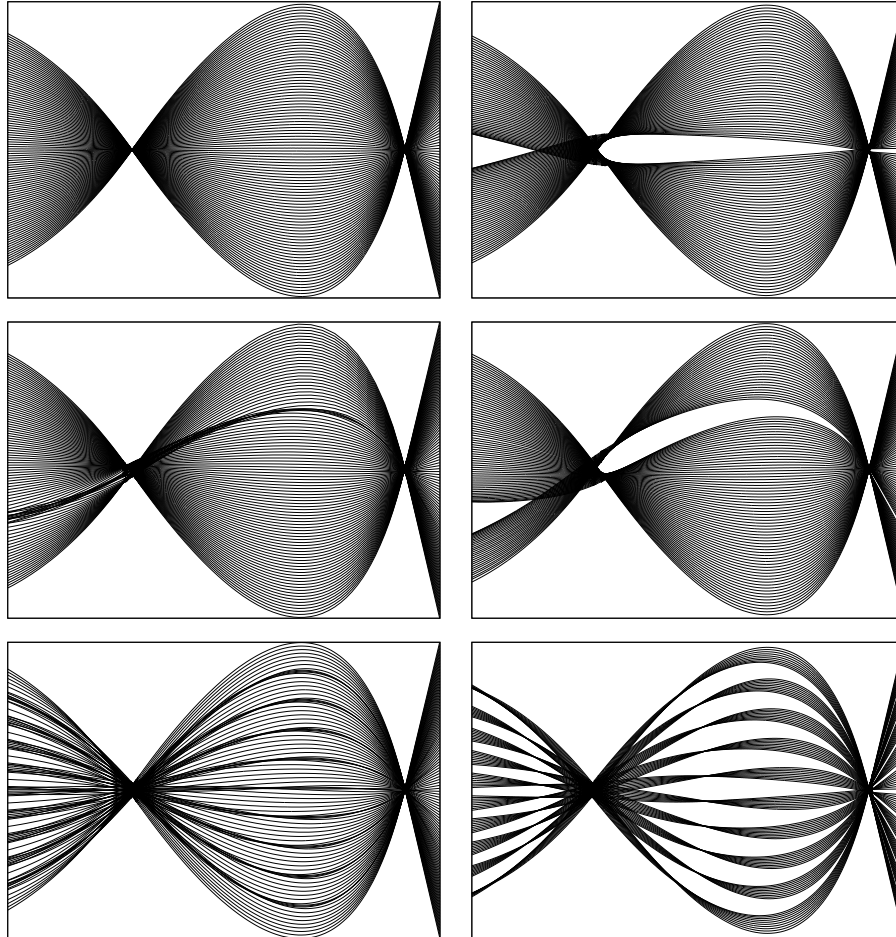
a szórása kisebb változékonyságot mutat időben, a fókuszálódás gyorsabban és jobban „szétfolyik”. De menjük végig rendre az ábrákon egyesével.

Láthatjuk, hogy a newtoni dinamikához képest (a) már maga a relativisztikus dinamika bevezetése (b) is diszperziót okoz, hiszen a newtoni esetben az első öt csomópont (jobbról nézve) erősen fókuszált, míg a relativisztikus esetben ez csak az első háromra mondható el. A (d) esetben, amikor lineáris állapotegyenletet tételezünk fel, vagyis kölcsönható anyagot tekintünk, mégha ez a kölcsönhatás csak az egyes héjakon belül érvényesül is, a csomópontok összébb húzódnak, így hamarabb kialakul a diszperzió. Az (e) és (f) centralizált tömegeloszlású rendszerek evolúciójában az egységes csomópontok szintet teljesen eltűnnek, és szinte egyenletesen és szimmetrikusan diszperzálódik a rendszer. Ugyanakkor a héjak eloszlása az evolúció vége felé a két legnagyobb tömegű héj körül koncentrálódik, és azok egymás körül oszcillálnak. Az (f) ábrán láthatjuk, hogy ez páros koncentrálódás akkor is megtörténik, ha a centralizált eloszlást nem a tömegek változtatásával, hanem a kezdő sugarak változtatásával érjük el. Mindkét ábrán megfigyelhető továbbá, hogy az oszcillációk amplitúdója kezdetben nő, aztán pedig csökken a horizont felé. Mindegyik ábrán jól látszik, hogy a legkülső héj(ak) relatív mozgása jelentős ingadozás(oka)t mutathat, azaz időlegesen eltávolodhat a rendszer középpontjától, és ennek az eltérésnek a rendszer aktuális vastagságához mért relatív nagysága a horizont felé növekszik. Emiatt az effektus miatt ábrázoltuk a legkülső tartományt halványabb szürkével az ábrákon. A véletlenszerű eloszlásokon azt látjuk, hogy megbomlik a szimmetrikus eloszlás esetében fellépő kettős rétegződés.

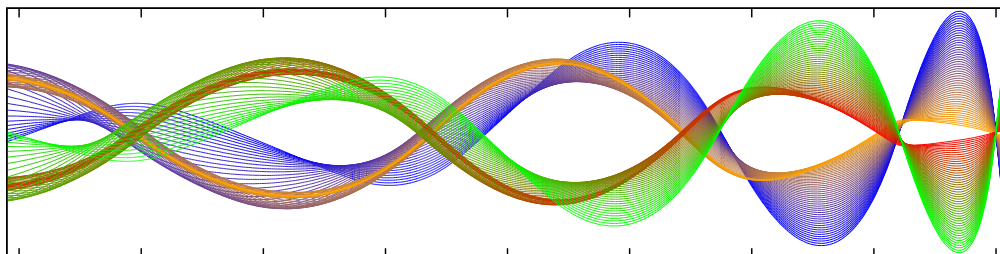
Mindezek a szimulációk azt mutatják, hogy bár az egyenletes eloszlású rendszerben nagyon éles a fókuszálódás, ez felbomlik, ha kölcsönhatást, és perturbációkat viszünk a rendszerbe. A folytonos modellben is az okozza a problémát, hogy a folytonosság feltételez egyfajta nagyon egyenletes eloszlást. A valóságban két réteg áthatolása egymáson ütközés nélkül is megtörténhet, mert a részecskék között véges távolság van, és nem töltik ki egyenletesen a teret, azonban a folytonos modell folytonos térkitöltést feltételez, és hasonlóan a vékony héjmodell is, csak térfogat helyett a felületen.

4.4.2. Kicsi perturbációk

Láthattuk a korábbi szimulációk alapján, hogy nagyon eltérő belső dinamikája lehet a héjrendszernek, miközben a radiális tömegközéppont (\bar{r}) a 8. ábrának megfelelően kevéssé változik. Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy egy kicsi perturbáció mennyire változtatja meg a mozgás jellegét és a belső eloszlást. Pici perturbáció gyanánt egy rés (angulul ún. gap) mozgását vizsgáljuk, azaz egy sok héjból álló egyenletes eloszlású rend-



9. ábra. Rések és „anti-rések” dinamikája. A fenti ábrákon az evolúció kezdeti szakaszát ábrázoltuk (az első két csomópontot egy nagyságrendileg 100 héjat tartalmazó héjrendszer esetén. Az idő iránya ezen az ábrán is jobbról balra halad. Az alap rendszer látható a bal felső sarokban, amely egyenletes eloszlású, nyugalomból indított rendszer, 101 por héjat tartalmaz, a héjak tömege és a héjak közötti távolság is egységnyi, a belső sugár 10000. Bal közepén ugyanez a rendszer, csak belülről a 31. héj tömegét megdupláztuk. Jobb felül és közepén egy-egy rés dinamikája látható, fölül az 51., közepén a 31. héjat vettük ki a rendszerből, így a héjak száma 100. Legalul egyenletesen elosztva 10 héjat vettünk ki a rendszerből vagy dupláztuk meg ugyanezen héjaknak a tömegét (antirések). Az ábrázolt tartomány $\bar{r} \in [9425, 10050]$.



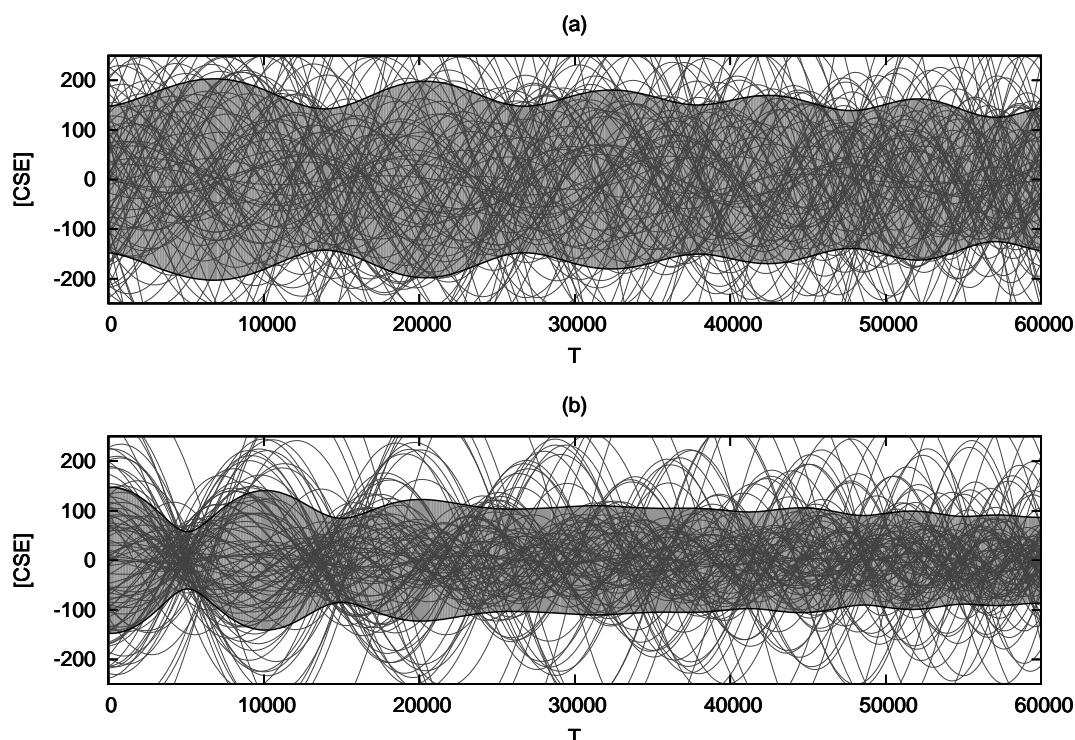
10. ábra. *Rés hosszú távú fejlődése.* Ezen az ábrán a 9. ábra jobb felső sarkában lévő rendszer hosszabb távú időfejlődését láthatjuk.

szerből kivesszünk egy héjat, és összehasonlítjuk a mozgást az eredeti egyenletes eloszláshoz tartozó mozgással. Vizsgáljuk a rés ellentettjét is, amikor az egyik héj tömegét megnöveljük, jelen esetben kétszeresére. A megnövelt tömegű héjakat az ábrákon dupla vonalvastagsággal ábrázoljuk. Láthatjuk, hogy egyetlen héj elvétele, vagy hozzátevéle a rendszerhez, jelentősen megváltoztatja a héjrendszer belső mozgását és eloszlását. A változás szemmel láthatóan drasztikus, pedig a változás egy rés esetén a tömegben csupán 1%-os. Rés esetén az láthatjuk, hogy a rés kiszélesedik, és a rés széléhez közeli héjak picit összesűrűsödnek és a rés körül egy „kéreg” keletkezik. Az antirés esetén azt láthatjuk, hogy a szomszédos héjak oszcillálni kezdenek a nagyobb tömegű héj körül. Az antirés hatása, azonban jóval kisebb a sűrűségeloszlást tekintve az ábrák alapján, lásd középső sor. Ugyanakkor egyenletesen elosztott rések vagy antirések hosszú távon hasonló csomósodásokat hoznak létre a rendszerben.

A 10. ábrán a fenti esetekből ábrázoltuk azt, amelyikben az 51. héjat vetjük ki, csak jóval hosszabb ideig, és minden héjat eltérő színnel ábrázoltunk, így sokkal jobban látszik, hogy miként változik az héj belsejének és széleinek egymáshoz viszonyított helyzete az időfejlődés során. Láthatjuk például, hogy a kezdeti rendszer széle hosszú idő után a belső „üreg” szélére kerül. Az üreg tehát kifordul, és egyúttal meg is vastagszik.

4.4.3. Vastag héjak diszperziója

Az előző két alfejezetben megismerkedhettünk a héjrendszerek alapvető tulajdonságaival. Láthattuk, hogy egyenletes eloszlás esetén a héjak oszcillációt végeznek a radiális tömegközéppont körül, és csomópontokba fókuszálódnak a héjak, amik létrehozzák az akusztikus szingularitást. De azt is láttuk, hogy amint a kezdőfeltételekkel eltérünk az egyenletestől, ezek a csomópontok



11. ábra. Vastag héjak szimulációja és a radiális diszperzió időfejlődése. A jobb láthatóság kedvéért a fenti grafikonokon balról jobbra halad az idő. A vizsgált rendszer 100 héjból áll és teljes tömege a Föld tömegének ötszöröse. Központi tömeg nincsen. A rendszer kezdeti radiális eloszlása Gauss-eloszlás, 50000 CSE átlagsugár körül. Az időfejlődés során a szürke tartomány határa jelöli a rendszer radiális szórájának változását, a kezdeti radiális szórást tehát leolvasható a szürke sáv tengelymetszetéről. A radiális kezdősebesség eloszlása ugyancsak Gauss-eloszlás, melynek középértéke zérus és szórása 0.01. Az (a) grafikonon a rendszer por héjakból áll, azaz a kinetikus energiát teljes egészében a radiális sebességek adják. A (b) grafikonhoz tartozó rendszerben a kinetikus energiát a viriáltétel szerint megosztjuk a radiális sebesség és a homogén lineárisnak feltételezett állapotegyenlet között, így a radiális kezdősebesség éppen harmada az (a) rendszerhez tartozó adatoknak.

kiszélesednek és felbomlanak, ugyanakkor az is látszik, hogy az egymáshoz közel haladó héjak szeretnek összesűrűsödni, és ezért fonalas szerkezet alakul ki. Továbbra is kérdés tehát, hogy a valóságos vastag héjak esetében fellép-e az akusztikus szingularitás, vagy sem. Az előző alfejezet tapasztalati alapján, most azt vizsgáljuk, hogyha különféle perturbáló hatásokat egyszerre engedünk érvényesülni, akkor mennyire diszperzálódik a rendszer. Ebben a fejezetben a newtoni esetre korlátozódunk, mert az akusztikus szingularitás jelensége ebben a közelítésben is fellép, célszerű tehát az egyszerűbb esetet

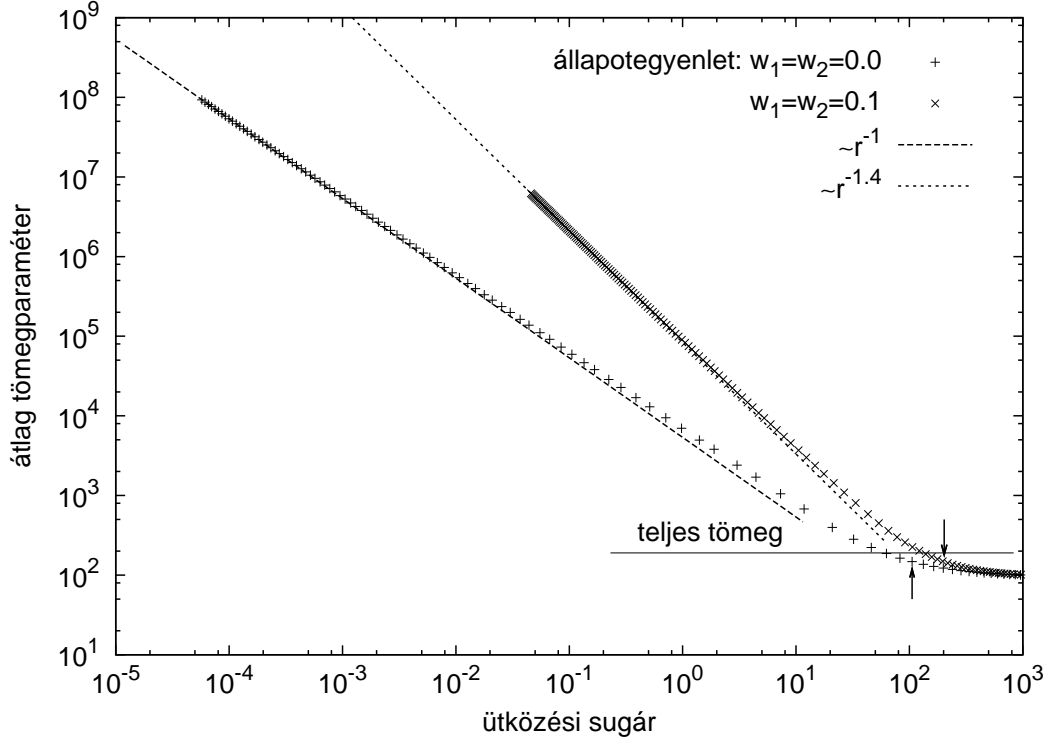
vizsgálni. Most sok héjat használunk, hogy a rendszer kis méretéből adódó effektusokat elkerüljük. A héjak tömegét továbbra is azonosnak vesszük, mert annak a perturbálásából adódó effektus nagyon hasonló a pozíciók perturbációjához, és ez utóbbit szerencsésebb alkalmazni, mert ebben az esetben azonos vonalvastagságot használhatunk minden héj mozgásának ábrázolásához. A rendszer tömegközéppontjának mozgása viszonylag pontosan leírható, ugyanakkor a héjak belső relatív mozgása kaotikusnak tűnik az ütközések figyelembe vételével. Kérdés hogy a héj tömegeloszlásának magasabb momentumai, azaz például a radiális irányú szórás, amit a rendszer vastagságának nevezhetünk, hogyan változik. Ennek vizsgálatához már olyan sok héjat kell vegyünk, amelyek egyesével nem vizualizálhatók jól, ezért a szórás változására koncentrálunk, amit a héj vastagságával azonosíthatunk.

A 11. ábrán $N = 100$ héjból álló rendszer időfejlődését láthatjuk. A kezdőfeltételekben a valóságos statisztikai rendszerekre érvényes kezdőfeltételeket akartuk szimulálni, ezért a radiális eloszlást, és a sebesség eloszlást is valószínűségi eloszlásnak tekintettük, éspedig Gauss-eloszlást feltételeztünk. Két esetet hasonlítottunk össze az ábrán, az (a) esetben por héjat feltételeztünk, a (b) esetben pedig ugyanolyan kezdőfeltételeket tekintünk, de a kinetikus energiát a viriáltétel szerint megosztjuk a radiális sebesség és az állapotegyenlet között, lásd a D. függelék. Jól látható, hogy a szórásban az oszcilláció hamar kisimul, tehát a valószínűségi eloszlások biztosítják, hogy ne alakuljon ki az akusztikus szingularitás, és ezek szerint a vastag por héjak viselkedése elég jól szimulálható héjrendszerek segítségével. Az is látható, hogyha a kinetikus energia teljes egészében a radiális sebességeloszlásban van, akkor természetes módon nagyobb a diszperzió, viszont a (b) esetben a „kisimulás” erőteljesebb.

4.4.4. Tömeg infláció

A tömeg infláció egy ismert jelenség, amely csak a horizont alatt alakulhat ki. Héjmodell esetén tömeg infláció alatt azt értjük, hogy a héjak közötti tartományok Schwarzschild tömeg paramétere tetszőleges nagyra nő, és egyúttal meghaladja a legkülső Schwarzschild tömeg paraméter értékét, vagyis a teljes rendszer tömegét. Ez természetesen csak úgy lehet, ha valamely héj gravitációs tömege negatívvá válik, amely csak a horizont alatt fordulhat elő. A tömeg infláció nincsen ellentmondásban az energia feltételekkel, mert a héjak saját tömege, azaz felületi energia sűrűsége a pozitív marad, sőt minden egyes tartományban is pozitív a Schwarzschild tömeg paraméter, csak nem monoton növekszik kifelé. Tömeginfláció folytonos modellekben is előfordul, lásd [86], de folytonos modellekben sokféle tömeg definiálható.

A jelenséget legegyszerűbb úgy vizsgálni, ha csak két héjat vizsgálunk, amelyek között transzparens áthatolást feltételeztünk. A (3.91) képlet alap-



12. ábra. *Tömeg infláció jelensége.* \bar{M} ábrázolása log-log skálán látható az ütközési sugár függvényében. Az alsó pontsorozat (+) por héjak rendszeréhez tartozik, míg a felső (\times) $w = 0.1$ paraméterű lineáris állapotegyenletű héjak rendszeréhez. Mindkét görbére jól illeszkedik az alsó becslés képlete által jósolt $-(1 + 2w_1 + 2w_2)$ meredekségű egyenes. Por héjak esetén a képletbe $w_1 = w_2 = 0$ helyettesítendő. A két nyilacska azt mutatja, hogy hol történik az előjelváltás. Csak előjelváltás után fordulhat elő, hogy lehet $M_4 > M_3$, vagyis a külső héj gravitációs tömege negatív, amely az ábra szerint is teljesül, amikor a rendszer a vízszintes vonal fölé kerül, amely a teljes tömeg, vagyis a külső tartomány Schwarzschild tömegparamétere.

ján, kihasználva, hogy Δg pozitív, azt kapjuk, hogy minden ütközés esetén érvényes az alábbi egyenlőtlenség

$$\Delta g \geq \frac{m_1 m_2}{r_c} \quad (4.106)$$

Az $M_4 + M_2 = M_3 + \Delta g$ összefüggés alapján, bevezetjük minden ütközésnél az $\bar{M} = \frac{1}{2}(M_2 + M_4)$ átlag tömegparamétert, vagyis az ütközés előtti és utáni héjak közötti tartományok Schwarzschild tömeg paramétereinek közép értékét, azt kapjuk, hogy

$$\bar{M} \gtrsim \frac{1}{2} \left(M_3 + \frac{m_1 m_2}{r_c} \right) \quad (4.107)$$

Amikor az r_c ütközési sugár zérushoz tart, akkor $\Delta g \gg M_3$. Feltéve, hogy a héjak állapotegyenlete homogén lineáris w_1 és w_2 paraméterekkel, a (2.37) összefüggést felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\bar{M} \gtrsim C r^{-(1+2w_1+2w_2)} \quad (4.108)$$

ahol C konstans. Mindez csak alsó becslés a köztes tartomány tömeg paraméterének változására, de a jelenséget konkrét esetekben (konkrét kezdő adatokkal) numerikusan is meg tudjuk vizsgálni. A szimulációk alapján megállapítható, hogyha a rendszer kezdeti paraméterei olyanok hogy a horizont alatt oszcilláció alakul ki a két héj közös radiális tömegközéppontja körül, akkor tömeg infláció is kialakul, és a tömeg sugár szerinti növekedése nem függ érzékenyen a kezdeti paraméterektől, vagyis $r_c \rightarrow 0$ esetben az aszimptotikus viselkedés ugyanaz a hatvány függvény lesz. Az ábrán az ütközési sugár függvényében ábrázoltuk az \bar{M} -et log-log skálán, így a hatvány függvények meredeksége leolvasható az egyenesek meredekségeiből. A rendszer paraméterei megegyeznek az [87] által vizsgált rendszerrel, hogy eredményeinket összehasonlíthassuk. Ezek a kezdő adatok a következők: $m_{\text{közp}} = 0$, $m_0^{(1)} = m_0^{(2)} = 100$, $m_g^{(1)} = 100$, $m_g^{(2)} = 90.05906$. Az egyik görbe két por héjból álló rendszerhez tartozik, a másik görbe ugyanahhoz a kezdő feltételű rendszerhez, de $w_1 = w_2 = 0.1$ állapotegyenletű héjakhoz tartozik. Megjegyezzük még, hogy a numerikus algoritmusnak a konvergenciáját is vizsgáltuk, és a konvergencia megállapítható, ahogy azt a [114] cikkben szereplő 11. ábra is mutatja.

4.5. Összefoglalás

Gyakorlati szempontból a doktori munka legfőbb eredménye annak a C++ programkódnak a létrehozása, amellyel az ebben a fejezetben ismertett numerikus eredményeket is származtattuk. Ennek a programkódnak számos előnye van, amelyeket az alábbiakban foglaltam össze. Természetesen a program megírásának feltétele volt az is, hogy a héjak dinamikája mellett, kidolgoztuk a héjrendszerek megfelelő leírását.

- A gyors numerikus számítást biztosítja, hogy a program C++ nyelven íródott. Ezen kívül különféle trükkökkel még gyorsítva is vannak a számítások. Ilyen trükk például, hogy bizonyos függvények kiértékelésénél az eredményt eltárolja a program a memóriában, mert az algoritmust

végigkövetve kiderül, hogy később is szükség lesz még ugyanarra az eredményre. Ez azért lényeges technikai megoldás, mert a C++ objektum orientált nyelv, amelynek az előnyeit ki is használjuk, ez viszont többnyire azzal jár, hogy minden elemeire van bontva, és külön objektumként kezeljük, ezért a belső műveletek részeredményei elvesznek, ha nem vigyázunk, és csak a végeredmény számít, amikor egy objektum függvénye hívásra kerül.

- A programcsomag objektum orientált nyelven íródott, és a magja az a könyvtár, amely tartalmazza az egyes objektumokat, mint például az állapotfüggvény, a héj és a héjrendszer. A felhasználó ezeket az objektumokat akár külön-külön is használhatja. Az objektumok biztosítják, hogy könnyen áttekinthető a struktúra, és könnyebben lehet módosítani, akár csak egyes részleteit is. Más felhasználók akár tovább bővíthetik, vagy lecserélhetik az egyes numerikus algoritmusokat igényeik szerint. A könyvtárban egy szimpla kapcsoló lehetőséget ad arra, hogy newtoni, Schwarzschild vagy Eddington idő szerint fejlesszük a héjakat.
- Az előző pontban említett könyvtár mellett, azonnal futtatható programok is helyet kaptak a programcsomagban amelyekkel tetszőleges nagy rendszerek szimulálhatók newtoni vagy relativisztikus dinamika szerint. A programok a szimulálandó héjrendszer adatait egy szöveges bemeneti adat file-ból olvassák be, amely egy szövegszerkesztővel könnyen módosítható. A kimeneti adat file-ba pedig a mozgást leíró adatsorok mellett megjegyzések is kerülnek, például az esetleges ütközések helyén az ütközés paraméterei is kiírásra kerülnek. A program meghívása során beállíthatjuk a numerikus felbontás pontosságát, azonban ettől függetlenül állítható be a kimeneti adat file-ba a lépésköz.
- A programcsomaghoz számos segédprogram is tartozik. Például olyan, amelyik legyártja az eredményeket ábrázoló gnuplot scriptet. Ez különösen sok héj esetén lényeges.

Miután ecseteltük a programcsomag előnyeit, térjünk rá arra, hogy a numerikus eredményeink alapján milyen fontos megállapításokat tehetünk. Legfőbb célunk az volt, hogy sok héjból álló rendszerek viselkedését tanulmányozzuk, amelyre eddig senkinek nem volt lehetősége. Így jobban megérthetjük a valódi vastag héjak dinamikáját is, és többek között a shell-crossing szingularitás jelenségét. A shell-crossing szingularitás jelensége héjmodellben nem csak azt jelenti, hogy a héjak ütköznek egymással, hanem azt is, hogy az ütközések összefókuszálódnak, lásd az egyenletes eloszlás esetében. Azt találtuk, hogy ez a fókuszálódás relativisztikus esetben kisebb mértékű, mint

newtoni esetben, azonban még érdekesebb, hogy a fókuszálódás felbomlik, ha megtörjük a szimmetriát. Azt találtuk, hogy a rendszer radiális eloszlásának szórása az első fókuszpont után gyorsan kisimul, ha a héjak kezdő adatait (koordináták és sebességek) Gauss-eloszlásból származtatjuk.

Érdekességként megvizsgáltuk azt is, hogy az egyenletes eloszlású rendszerben okozott kicsi perturbációk, mint amilyen egy rés vagy „anti-rés” milyen módon befolyásolja a dinamikát. Azt találtuk, hogy a radiális tömegközépponthoz viszonyított relatív belső mozgás drasztikus mértékben és igen rövid időn belül megváltozik csupán 1%-os perturbáció esetében is. A rés esetében a rés gyors kiszélesedését és kéregképződés jelenségét figyeltük meg a rés szélén, majd hosszú távon a kiszélesedett üreg „kifordulását”. Antirés esetén csomósodást figyeltünk meg az antirés körül.

Egy másik érdekes és a héjmodellben keveset tanulmányozott jelenség, a tömeg infláció jelensége. A gravitációs tömeg negatívitása a képletekben már korábban is megmutatkozott [87], de csak egyetlen ütközés vizsgálatára korlátozódtak a vizsgálatok [67]. A héjformalizmus kiválóan alkalmas arra, hogy a tömeg infláció jelenségét egy dinamikai folyamat végigkövetésével vizsgáljuk, és ezt elsőként végeztük el. A tömeg inflációval kapcsolatos eredményünk egy analitikus becslés, mely szerint a tömeg legalább a (4.108) képletben megfogalmazott alsó korlát szerint robban fel. Ezt numerikusan is igazoltuk, és azt találtuk, hogy az eredmény nem függ érzékenyen a kezdő adatoktól.

5. Gravastar

A gravastar egy hipotetikus csillagmodell, amely a fekete lyuk alternatívája kíván lenni. A gravastar centrumában a téridő de Sitter-szerű, amely a szokásos külső Schwarzschild vákuumhoz olyan módon kapcsolódik, hogy a konstrukció elkerüli az eseményhorizont kialakulását. A két téridő közötti átmenet sokféle módon elképzelhető, és ennek megfelelően számos gravastar modell létezik, ezért a gravastar tulajdonképpen gyűjtőfogalom, amely az angol „gravitational vacuum star” kifejezésből származó mozaikszó.

A továbbiakban röviden körüljárjuk, hogy miért lehet szükség alternatív fekete lyuk modellekre, és hogy ezek közül a gravastar miért kap mostanában kiemelkedő figyelmet. Ezt követően a héj formalizmus segítségével konstruálható egyszerű gravastar modellt ismertetünk, aminek megvizsgáljuk főbb tulajdonságait, különös tekintettel a stabilitását. Ez utóbbihoz egy új módszert használunk, felhasználva a héjak dinamikájára vonatkozó eredményeinket.

5.1. Alternatív fekete lyukak

Egyre több asztrofizikai megfigyelés támasztja alá olyan nagy tömegű objektumok létezését az Univerzumban, melyek kiterjedése közel van a Schwarzschild-sugárhoz, ahol az eseményhorizont kialakulását várjuk [94, 95, 96]. Ezeket az objektumokat szokás széles körben fekete lyukaknak nevezni, annak ellenére, hogy az eseményhorizont létezését megfigyelésekkel bizonyítani elvileg nem lehetséges külső megfigyelőknek [97]. Az általános relativitás klasszikus elmélete gömbszimmetria esetén a jól ismert Schwarzschild fekete lyukat jósolja, mint a gravitációs összeomlás statikus végállapotát, melynek metrikája

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.109)$$

ahol $R_S = 2GM/c^2$ a Schwarzschild-sugár, c a fénysebesség, G a gravitációs konstans, M a fekete lyuk tömege, $d\Omega^2$ az egység gömb ívelem négyzete, t a Schwarzschild időkoordináta és r a sugár koordináta. Ennek a metrikának $r = 0$ helyen ún. görbületi szingularitása van, amely azt jelenti, hogy a görbület végtelenné válik a centrumban, ezáltal végtelen árapály erők ébrednek. A központi szingularitásba futó világvonalak tovább nem folytathatók. Az energia-impulzus tenzort tekintve ez a megoldás egy tömegpontot ír le, amelyben az összes anyag bezuhant egy centrális szingularitásba, vagy öröktől fogva a szingularitásban van, vagyis az origón kívül mindenhol vákuum van. Nyilvánvaló, hogy a kvantumgravitáció elméletének hiányában ezt a

centrális szingularitásba omló megoldást nem tekinthetjük mindenhol érvényesnek teljes bizonyossággal. A metrikának ráadásul van egy másik szingularitása is $r = R_S$ helyen, amely ún. koordináta szingularitás, vagyis ki-transzformálható egy megfelelő koordináta választással. Ez azt jelenti, hogy klasszikusan semmi különös nem történik, ha egy teszt részecske átmegy a horizonton, amely az $r = R_S$ gömbfelület. Mivel nincs még a kvantummechanikának és a gravitációnak egy konzisztens elmélete jelenleg, ezért nem tudjuk pontosan, hogy mi a helyzet, ha kvantummos részecskéket vizsgálunk, de szemi-klasszikus közelítésekben az eseményhorizontnak kitüntetett szerepe van. Jól ismert például, hogy a fény végtelen kékeltolódást szenved a horizonton [98], vagy említhetjük az ún. információs paradoxont, amely máig egy tisztázatlan probléma a fekete lyukak fizikájában [99]. Általánosan megállapíthatjuk, hogy a fekete lyukakkal kapcsolatos esetleges problémák a kvantum mechanikához kapcsolódnak, és az esemény horizont környékén vagy az alatt jelentkeznek. Annak ellenére, hogy a fekete lyukak koncepciója széles körben elfogadott tudományos körökben, nyilvánvaló, hogy a felvetődött kérdésekre csak a kvantum-gravitáció koherens elmélete adhatja meg a végső választ, és amíg nincs a birtokunkban ilyen elmélet, addig nem tudhatjuk, hogy milyen pontossággal vehetjük érvényesnek a görbületi szingularitással és eseményhorizonttal rendelkező Schwarzschild megoldást.

Ezek az elméleti problémák motiválták a kutatókat, hogy a fekete lyukak helyett olyan alternatív megoldásokat keressenek, melyekben a gravitációs összeomlás végpontja egy eseményhorizont nélküli állapot. Az általános ötlet, hogy állítsuk meg az összeomlást még azelőtt, hogy kialakulna az eseményhorizont. Ehhez általában valamilyen egzotikus tulajdonságú anyag bevezetése szükséges. Az irodalomban fellelhető próbálkozásokról egy részletes áttekintést ad Visser összefoglaló cikke [100]. Ezen alternatív modellek közül az egyik legtöbbet tanulmányozott az ún. gravastar, melyet úgy kapunk, hogy egy belső de Sitter téridő tartományt összeillesztünk külső Schwarzschild vákuummal. A belső de Sitter téridő értelmezhető sötét energiaként, mivel pedig az Univerzumban jelenleg mérhető gyorsulva tágulás ugyancsak magyarázható a sötét energia koncepciójával, ezért a gravastar modell az alternatív fekete lyuk megoldások között mostanában a figyelem középpontjába került. Azáltal hogy a középpontban a Schwarzschild téridőt de Sitter téridőre cseréljük automatikusan elkerüljük a középpontban a görbületi szingularitást. Ez a gondolat nem újkeletű, már a 80-as években fölvetették [101], sőt a Schwarzschild – de Sitter modell dinamikáját is megvizsgálták, azonban a szerzők arra az esetre koncentráltak, amikor az illesztés helye az eseményhorizont alá esik, tipikusan a Planck-skála nagyságrendjébe [102]. A gravastar modell, ami Mazur és Mottola nevéhez fűződik [103], ettől csak annyiban különbözik, hogy az illesztést a Schwarzschild-sugáron kívülre helyezik, ezáltal elkerülve

azokat a problémákat is, amelyek az eseményhorizont létezéséhez kapcsolódnak. Mazur és Mottola eredetileg közölt írásában egy túlbonyolított sokrétegű modell szerepelt. Azóta azonban számos hasonló modellt publikáltak, amelyek alapvetően két nagy csoportba sorolhatók a de Sitter és Schwarzschild közötti átmenet típusa alapján. A két tartomány közti átmenet lehet folytonos, amelyben az anyagsűrűség a sugár folytonos függvénye [106, 107, 108], vagy az illesztést biztosíthatjuk infinitezimális héjak segítségével. A folytonos esetben az adódik, hogy a nyomásnak anizotrópnak kell lennie bizonyos tartományban, azaz a tangenciális és normális irányú nyomások különböznek egymástól [104]. Infinitezimális héjak esetében a sugárirányú nyomás eltűnik a modelltől, így értelmetlen anizotrópiáról beszélni. Természetesen a folytonos modellek realiztikusabbak, azonban a héjak sokkal egyszerűbben kezelhetők, és ez utóbbi esetben is vizsgálhatók a gravastar legfontosabb jellegzetes tulajdonságai. E dolgozat eredményeit fölhasználva természetesen ez utóbbival fogunk részletesen foglalkozni.

Bár a gravastar modell konstruálásából adódóan megold bizonyos problémákat, amelyek a fekete lyukakkal kapcsolatosan léptek fel, rögtön fölvetődnek más problémák, amelyeket tisztázni kell. A három legfontosabb kérdés:

- Hogyan tud kialakulni egy ilyen objektum a csillagfejlődés során?
- Termodinamikailag és dinamikailag stabil-e a konstrukció?
- Ha valóban léteznek gravastarok, a fekete lyukak létét kizárják-e?

Az első a legnehezebb kérdés, amelyre idáig még nem nagyon próbálkozott senki lehetséges magyarázatot adni. A termodinamikai stabilitásra már Mazur és Mottola is rámutatott. A radiális stabilitást Visser és Wiltshire vizsgálta a legegyszerűbb héjmodellen [105], és axiális stabilitási vizsgálatokat is végeztek [108, 109]. Ezekből a dinamikai vizsgálatokból az derült ki, hogy létezik a konfigurációs térben stabil egyensúlyi vagy akár stabilan oszcilláló gravastar állapot, de ezek az állapotok a konfigurációs térnek csak kis részét jellemzik, és nem zárják ki fekete lyukak létezését sem, hiszen lehetségesek olyan kezdőfeltételek is, amikor egy kezdeti instabil de Sitter – Schwarzschild modell fekete lyukká omlik össze. Természetesen amíg nem tudjuk, hogy a csillagfejlődés során hogyan juthatunk ilyen egzotikus állapotokba, addig nincs értelme a konfigurációs tér egyes részeinek mértékét összehasonlítani, akárhogy is definiáljuk a mértéket. Az is kiderült továbbá, hogy, amikor a gravastar sugarával a Schwarzschild-sugárhoz közelítünk, akkor sérül a domináns energiafeltétel, ami az általános relativitáselmélet egyik legfontosabb kauzalitási feltétele. Ez a kauzalitás sértés fellép mind a folytonos [104], mind pedig a héjmodellek esetében [112]. Tehát, ha stabil lenne is a gravastar, nem

tudunk vele tetszőleges pontossággal imitálni egy fekete lyukat. Ráadásul az is kiderült, hogy a gravastar és más alternatív fekete lyuk modellek is instabilak a gyors forgás esetében [109], márpedig megfigyelések alapján asztrofizikai objektumok gyors forgása a természetben viszonylag gyakori [110, 111].

5.2. Gravastar héjmodell

Az alábbi vizsgálatokban Visser és Wiltshire féle gravastar héjmodellt fogjuk használni [105]. Ebben a modellben a belső de Sitter régiót a külső Schwarzschild vákuumtól egyetlen héj választja el, így a dolgozatban ismertett héj formalizmus alkalmas arra, hogy ezt a modellt részleteiben vizsgáljuk. A belső de Sitter régió energiasűrűsége legyen ρ_0 , a külső Schwarzschild vákuum tömegparamétere legyen M , amely lényegében a gravastar teljes tömege. A két régió határán feltételezünk egy infinitezimálisan vékony gömbhéjat, melynek sugara a , és amelyet dinamikusan engedünk változni. A héj felületi energiasűrűsége legyen σ , felületi feszültsége¹⁵ pedig θ . Feltételezzük még továbbá az állapotegyenlet létezését $\theta = \theta(\sigma)$ kapcsolat formájában.

5.2.1. Dinamikai egyenletek

A további vizsgálatokhoz érdemes lesz bevezetni az alábbi dimenziótlan változókat. A dimenziótlan sugár $\alpha = a/(2M)$, a dimenziótlan felületi energiasűrűség $\Sigma = \sigma M$, a dimenziótlan felületi feszültség $\Theta = \theta M$, a dimenziótlan de Sitter energiasűrűség $\eta = 8kM^2$, ahol $k = 4\pi\rho_0/3$. Hogy elkerüljük az eseményhorizont kialakulását a külső Schwarzschild régióban, az $1 < \alpha$ egyenlőtlenségnek fent kell állnia. Ahhoz pedig, hogy a belső de Sitter régióban elkerüljük a „kozmológiai” horizont kialakulását $\alpha < \eta^{-1/2}$ egyenlőtlenségnek kell fent állnia. Gravastar megoldást tehát csak $0 < \eta < 1$ esetén kereshetünk. Megjegyezzük még továbbá, hogy dinamikus esetekben az időt a héj dimenziótlan sajátidejével mérjük, azaz $2M$ egységekben.

A de Sitter tartomány határán a tömegfüggvény $m_- = ka^3$ a külső Schwarzschild tartományban pedig $m_+ = M$ konstans. Ezt felhasználva a fenti dimenziótlan változókkal a gömbszimmetrikus vákuum illesztési egyenletek alapján azt kapjuk, hogy

¹⁵A felületi feszültség a 2. fejezetben kétdimenziós nyomásnak nevezett mennyiség elmentettje: $\theta = -\mathcal{P}$. Csak azért használjuk a felületi feszültséget a nyomás helyett, mert a gravastarokkal foglalkozó irodalomban ez terjedt el.

$$\Sigma = \frac{1}{8\pi\alpha} \left(\sqrt{1 - \eta\alpha^2 + \dot{\alpha}^2} - \sqrt{1 - \alpha^{-1} + \dot{\alpha}^2} \right), \quad (5.110)$$

$$\Theta = \frac{1}{16\pi\alpha} \left(\frac{1 - 2\eta\alpha^2 + \dot{\alpha}^2 + \alpha\ddot{\alpha}}{\sqrt{1 - \eta\alpha^2 + \dot{\alpha}^2}} - \frac{1 - \alpha^{-1}/2 + \dot{\alpha}^2 + \alpha\ddot{\alpha}}{\sqrt{1 - \alpha^{-1} + \dot{\alpha}^2}} \right), \quad (5.111)$$

ahol a pont a továbbiakban a dimenziótlan sajátidő szerinti deriváltat jelöli.

Gravastar esetén is megköveteljük, hogy a héj energiasűrűsége ne legyen negatív, ez pedig azt jelenti, hogy az (5.110) egyenlet jobb oldalán az első tag nagyobb kell legyen mint a második tag, amelyből pedig az következik, hogy $\alpha < \eta^{-1/3}$. Vegyük észre, hogy ez az α -ra vonatkozó feltétel erősebb, mint amely a de Sitter horizont elkerüléséből adódott. Azt is megjegyezzük, hogy rögzített α mellett, Σ akkor éri el a maximumát, ha $\dot{\alpha}$ eltűnik.

A gravastar dinamikájának leírásához érdemes bevezetni az ún. effektív potenciált, $V(\alpha) \equiv -\dot{\alpha}^2/2$ kifejezést, amely az $\dot{\alpha}^2/2 + V(\alpha) = 0$ dinamikai egyenletet definiálja. Átrendezés és kétszeri négyzetre emelés után némi algebrai manipulációval kapjuk az (5.110) egyenletből, hogy

$$V(\alpha) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\eta}{64\pi^2\alpha\Sigma^2(\alpha)} - \left(4\pi\alpha\Sigma(\alpha) + \frac{1 + \eta\alpha^3}{16\pi\alpha^2\Sigma(\alpha)} \right)^2 \right]. \quad (5.112)$$

Ha ismerjük a héj állapotegyenletét, akkor Σ meghatározható α függvényében, és ekkor a $V(\alpha)$ effektív potenciál is meghatározható a sugár függvényében és így leírható a héj mozgása.

Fontos megjegyezni, hogy a fent definiált effektív potenciál csupán $-\dot{\alpha}^2/2$ kifejezésre használt jelölés, és nem tekinthetünk rá úgy, mint egy valódi külső potenciálra, ugyanis jelen esetben a teljes energia definíció szerint mindig zérus, azaz a kinetikus energia megváltoztatása automatikusan magával vonja a potenciál megváltozását is. Ez onnan is látszik, hogy a kezdősebesség megváltoztatásával megváltozik a kezdeti Σ_0 felületi energiasűrűség, ez pedig megváltoztatja a $\Sigma(\alpha)$ függvényt, és ezáltal megváltozik a $V(\alpha)$ potenciál is.

5.2.2. Egyensúlyi helyzetek

Ebben a részben az egyensúlyban lévő gravastarokat vizsgáljuk, amikor is a gravastar nyugalomban van, és a héjat mozgató erők is egyensúlyban vannak, azaz $V(\alpha_0) = 0$ és $V'(\alpha_0) = 0$, ahol az aposztróf a dimenziótan sugár szerinti deriváltat jelöli. $V(\alpha_0)$ eltűnéséből definíció szerint következik, hogy $\dot{\alpha} = 0$. Ugyanakkor az is belátható, hogy $V'(\alpha_0)$ eltűnéséből pedig $\ddot{\alpha} = 0$

következik. Egyelőre még nem vizsgáljuk az egyensúlyi helyzet stabilitását csak a létezésének feltételeit.

Az egyensúlyban lévő gravastarok jellemzésére bevezetjük a $\Sigma_0 = \Sigma(\alpha_0)$ és $\Theta_0 = \Theta(\alpha_0)$ jelöléseket. Az 5.110 és (5.111) dinamikai egyenletekbe $\alpha = \alpha_0$, $\dot{\alpha} = 0$ és $\ddot{\alpha} = 0$ helyettesítve kapjuk, hogy

$$\Sigma_0 = \frac{1}{8\pi\alpha_0} \left(\sqrt{1 - \eta\alpha_0^2} - \sqrt{1 - \alpha_0^{-1}} \right), \quad (5.113)$$

$$\Theta_0 = \frac{1}{16\pi\alpha_0} \left(\frac{1 - 2\eta\alpha_0^2}{\sqrt{1 - \eta\alpha_0^2}} - \frac{1 - \frac{1}{2}\alpha_0^{-1}}{\sqrt{1 - \alpha_0^{-1}}} \right). \quad (5.114)$$

Az (5.113) és (5.114) algebrai egyenleteket és $\Sigma_0(\eta, \alpha_0) > 0$ feltételt felhasználva megmutatható, hogy $\Theta_0(\eta, \alpha_0)$ mindig negatív, vagyis nem kell negatív nyomású exotikus anyagot feltételeznünk a gravastar felületén.

Megjegyezzük, hogy abban az esetben ha az állapotegyenlet adott, akkor egy egyensúlyban lévő gravastar esetében η és α_0 közül csak az egyik mennyiség választható szabadon, hiszen (5.113) és (5.114) egyenletek alapján $w_0 = -\Theta_0/\Sigma_0$ konzisztens kell legyen az állapotegyenlet által a kezdő állapotban rögzített értékkel. Ha azonban nem rögzítjük az állapotegyenletet, hanem általában vizsgálódunk, akkor az egyensúlyban lévő gravastarok parametrizálhatók az (η, α_0) paraméter párossal, és ebben az esetben $w_0(\eta, \alpha_0)$ értéke adott paraméterű egyensúlyi gravastarra meghatározódik (5.113) és (5.114) alapján.

Jellemezni szeretnénk az egyensúlyban lévő gravastarokat az (α_0, η) síkon. Ehhez elsőként azt vizsgáljuk meg, hogy a domináns energiafeltétel mely tartományon teljesül. Megmutatható, hogy egyensúlyi helyzetben, amikor Σ_0 nem negatív, akkor Θ_0 negatív. Ez azt jelenti, hogy a domináns energiafeltétel a $0 \leq w_0 \leq 1$ követelménnyel ekvivalens. Az a tartomány az (α_0, η) síkon, ahol ez teljesül a 14. ábrán látható, és a $w_0(\eta, \alpha_0) = 1$ görbe határolja felülről, aminek implicit egyenlete megadja a maximális η értéket

$$\eta_{\max}^{\text{DEC}}(\alpha_0) = \frac{60\alpha_0^2 - 36\alpha_0 - 25 + (5 - 6\alpha_0)\sqrt{100\alpha_0^2 - 124\alpha_0 + 25}}{128\alpha_0^3(\alpha_0 - 1)}, \quad (5.115)$$

Ez a görbe a 14. ábrán folytonos vastag vonallal látható. A görbe aszimptotikus viselkedése η kis értékeire $\eta_{\max}^{\text{DEC}} \approx \frac{2}{5}\alpha_0^{-3}$ alakú. A görbe az α_0 -tengelyt az $\alpha_0 = 25/24$ értéknél metszi, vagyis egyensúlyi gravastar $\alpha_0 = 25/24$ értékhez tartozó sugárnál kisebb egyensúlyi sugárral nem létezik. Mivel a Schwarzschild-sugár $\alpha = 1$ értéknek felel meg, ez azt jelenti, hogy egyensúlyban lévő gravastart nem tudunk konstruálni tetszőlegesen közel az esemény

horizonthoz, tehát ebből az látszik, hogy a gravastar ebben az értelemben nem egy tökéletes alternatíva a fekete lyukak helyett. Kérdés persze, hogy a megfigyelések szerint vannak-e ennél jobban koncentrált objektumok az Univerzumban.

5.2.3. Stabilitás

A stabilitás vizsgálatban fontos szerepe van a potenciál alakjának. Ahogy azonban korábban már megjegyeztük, nem használhatjuk automatikusan a klasszikus mechanikai analógiát, mert a korábbiakban definiált effektív potenciálra nem tekinthetünk úgy, mint egy külső potenciálra. A klasszikus stabilitás vizsgálat szerint az egyensúlyban lévő rendszer akkor van stabil egyensúlyban, ha a potenciál második deriváltja az egyensúlyi pontban pozitív, $V''(\alpha_0) > 0$. Ez azért van így, mert ha valamilyen kis perturbáció hatására növeljük a rendszer kinetikus energiáját, és ezzel együtt a rendszer teljes energiáját, akkor a mozgás a potenciálvölgyben az egyensúlyi helyzet körül marad és korlátos mozgást (tipikusan kis rezgéseket) végez. Ezzel szemben az általános relativitáselméletben szigorúan véve nincs arra lehetőség, hogy a téridőn kívülről valami perturbációt végezzünk a rendszeren, a perturbációt okozó hatás forrásának eleve a téridőben kell lennie. Ahhoz hogy a stabilitást vizsgálni tudjuk a gömbszimmetrikus héjmodellen belül, fel kell tennünk, hogy a perturbáló hatás után a rendszer továbbra is a héjmodellel írható le. Ezt megtehetjük például úgy, hogy egy kis tömegű gömbszimmetrikus porfelhőt ejtünk a héjra, amely azzal ütközik. Ezt fogjuk a későbbiekben részletesen megvizsgálni teljesen rugalmatlan ütközést feltételezve. A lokális stabilitás vizsgálatához azonban elegendő annyit feltételeznünk, hogy az így megvalósított kis perturbáció az effektív potenciált kicsit megváltoztatja, és a potenciál a paraméterek függvényében folytonosan változik. Tegyük fel, hogy a gravastar kezdetben nyugalomban volt és emellett teljesül $V''(\alpha_0) > 0$. Ha a perturbáció után a gravastar kezdősebességet kap, de a potenciál a folytonosság miatt megőrzi alakját, akkor azt kapjuk, hogy a a potenciál egy picit a nullszint alá tolódik, és a klasszikus esethez hasonlóan a mozgás az egyensúlyi helyzet körül korlátos tartományon marad.

Kicsit adekváltabban az egyensúlyi helyzetben lévő gravastar stabilitási tulajdonságát az effektív potenciál egyensúlyi helyzet környezetében érvényes konvex-konkáv karaktere határozza meg, és eszerint az egyensúlyi állapotokat az alábbi osztályokba sorolhatjuk.

- (a) *Stabil egyensúlyi helyzet*: Az egyensúlyban lévő gravastar egyensúlyi helyzetét stabilnak nevezzük, ha kis perturbációk hatására a rendszer az egyensúlyi helyzet körül korlátos mozgást végez. Ennek az a feltétele,

ahogy fentebb már megjegyeztük, hogy az effektív potenciál konvex legyen α_0 közelében, vagyis $V''(\alpha_0) > 0$. Egy ilyen esetben az potenciál alakját az 1-es görbe illusztrálja a 13. ábrán.

- (b) *Lokálisan instabil*: Ez a helyzet akkor ha a potenciál az α_0 sugárnak legalább az egyik oldalról konkáv. Ez azt jelenti, hogy a kis perturbációk hatására a rendszer nem lokális mozgást fog végezni. Ettől még globálisan lehet korlátos a mozgása, de az már nem a potenciálfüggvény lokális viselkedésén múlik. Ilyen lokálisan instabil állapot akkor fordulhat elő, ha $V''(\alpha_0) < 0$. Egy ilyen esetben az potenciál alakját tipikusan a 3-as görbe illusztrálja. Ha V'' nem folytonos az α_0 pontban, de létezik a bal és jobb oldali határértéke, akkor bármelyik negatívítása esetén lokálisan instabil a rendszer.

Megjegyezzük, hogy az is előfordulhat, hogy $V''(\alpha_0) = 0$. Ilyenkor a potenciál első nem zérus magasabb rendű α -deriváltja határozza meg a potenciál konvex-konkáv jellegét. Az is előfordulhat, hogy α_0 -ban inflexiós pontja van a potenciálnak, ez is instabil egyensúlyi állapotnak felel meg.

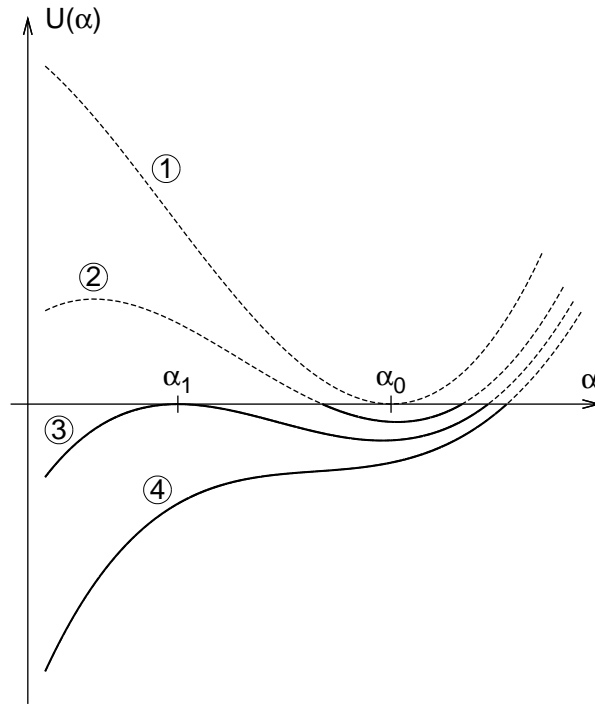
- (c) *Neutrális egyensúlyi állapot*: Egészen speciális eset, ha a potenciál azonosan zérus α_0 környezetében: $V(\alpha) \equiv 0$. Ekkor α_0 környezetében neutrálisnak nevezzük az egyensúlyi helyzetet.

Annak eldöntéséhez, hogy a gravastar egyensúlyban van-e, nem volt szükség az állapotegyenlet ismeretére, csak Σ_0 és Θ_0 értékére. Ha azonban az egyensúlyi helyzet stabilitásáról szeretnénk értekezni, akkor szükségünk lesz az állapotegyenlet ismeretére legalább az egyensúlyi helyzet kis környezetében.

$V''(\alpha_0)$ értékének meghatározásához felhasználjuk, hogy a hangsebesség az alábbi módon adható meg

$$c_s^2 = -\frac{d\Theta}{d\Sigma} = -\frac{d\Theta/d\alpha}{d\Sigma/d\alpha} . \quad (5.116)$$

ahol $d\Theta/d\alpha$ és $d\Sigma/d\alpha$ (5.110) és (5.111) egyenletek alapján kifejezhetők. Továbbá $\dot{\alpha}^2 = -2V(\alpha)$ és $\ddot{\alpha} = -V'(\alpha)$ helyettesítéseket alkalmazva (5.112) alapján azt találjuk, hogy $d\Sigma/d\alpha$ megadható $V(\alpha)$ és $V'(\alpha)$ segítségével. Hasonlóan $d\Theta/d\alpha$ is kifejezhető a potenciál egyensúlyi pontban vett $V(\alpha)$, $V'(\alpha)$ és $V''(\alpha)$ deriváltjaival és magasabb deriváltaktól nem függ. Egyensúlyban lévő gravastarra tehát, amikor is $V(\alpha_0) = 0$ és $V'(\alpha_0) = 0$, azt kapjuk, hogy $V''(\alpha_0)$ kifejezhető η , α_0 és $c_{s0}^2 = c_s^2|_{\alpha_0}$ függvényében. Tehát ahogy korábban említettük a stabilitást az állapotegyenlet Σ_0 pont körüli viselkedése határozza meg, konkrétan a meredekségét megadó hangsebesség négyzete.



13. ábra. *Illusztráció a gravastar dinamikáját leíró effektív potenciál alakjára. Az 1-es görbe egy stabil egyensúlyi helyzetet jellemez. A 2-es, 3-as és 4-es görbék olyan gravastarokhoz tartoznak, amiket úgy kapunk, hogy rendre egyre nagyobb tömeget ejtünk az egyensúlyban lévő gravastarra. A 2-es és 3-as görbe esetén a mozgás korlátos marad. A 3-as görbe a maximálisan terhelte gravastarhoz tartozik, ha annál nagyobb tömeget ejtünk rá, akkor fekete lyukká omlik össze, ezt a szituációt látjuk a 4-es görbén.*

Megmutatható, hogy stabil konfigurációra a hangsebesség alulról korlátos

$$c_{s,\min}^2 = -\frac{\partial\Theta/\partial\alpha}{\partial\Sigma/\partial\alpha}\Big|_{\alpha_0} = -\frac{\partial\Theta_0/\partial\alpha_0}{\partial\Sigma_0/\partial\alpha_0}, \quad (5.117)$$

ahol $c_{s,\min}^2$ a hangsebesség négyzete c_{s0}^2 az α_0 helyen azon konfigurációkra, amelyekre $V''(\alpha_0) = 0$ vagyis potenciálnak inflexiós pontjuk van az egyensúlyi pontban. Ez azt jelenti, hogy $V''(\alpha_0) > 0$ amikor $c_{s0}^2 > c_{s,\min}^2$.

Az (5.117) összefüggés bizonyításához először írjuk fel Σ és Θ mennyiségeket az alábbi mennyiségek függvényeként $\Sigma(\alpha, \dot{\alpha})$ és $\Theta(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$. Az $\dot{\alpha}^2 = -2V(\alpha)$ és $\ddot{\alpha} = -V'(\alpha)$ ekvivalenciák használatával ezek átírhatók $\Sigma = \Sigma(\alpha, V(\alpha))$ és $\Theta = \Theta(\alpha, V(\alpha), V'(\alpha))$ alakba, ahol η -ra minden esetben, mint rögzített paraméter tekintünk. Ezután az (5.117) összefüggés első egyenlősége belátható, ha felhasználjuk a láncszabályt $d\Sigma/d\alpha =$

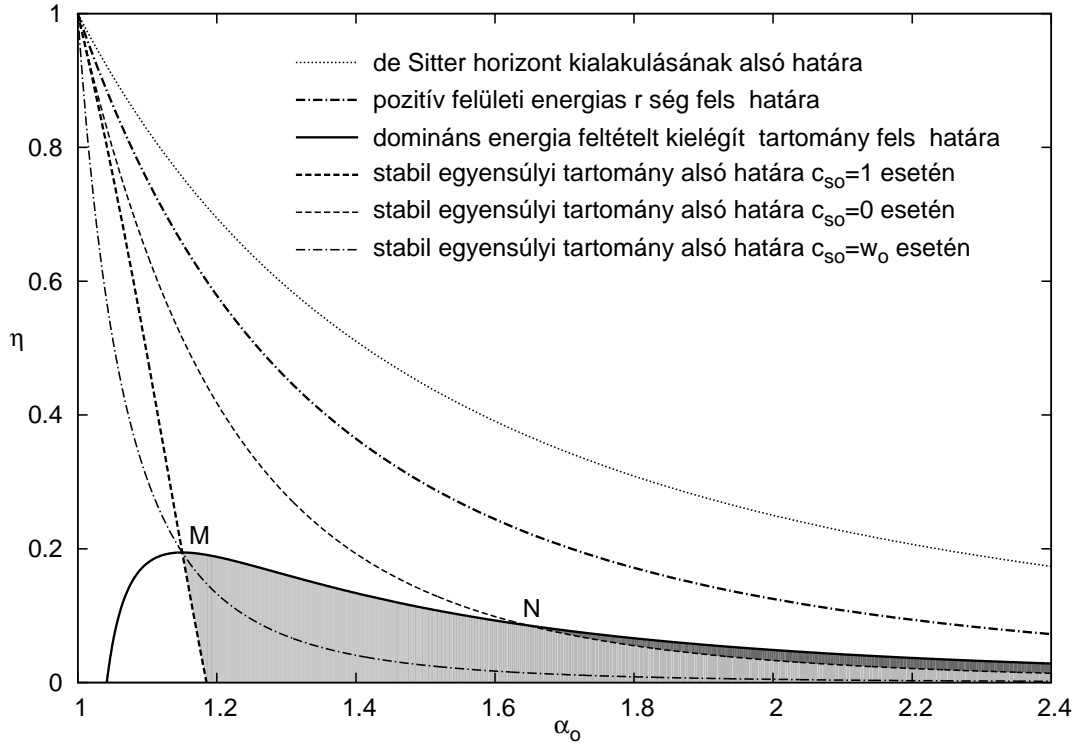
$\partial\Sigma/\partial\alpha + (\partial\Sigma/\partial V) V'$ és $d\Theta/d\alpha = \partial\Theta/\partial\alpha + (\partial\Theta/\partial V) V' + (\partial\Theta/\partial V') V''$ formában, és kihasználjuk, hogy $V'(\alpha)$ and $V''(\alpha)$ eltűnnek egyensúlyban lévő rendszer esetén. Az (5.117) összefüggésben szereplő második egyenlőség levezetéséhez felhasználjuk az (5.110) és (5.113) egyenleteket, amelyek szerint $(\partial\Sigma/\partial\alpha)|_{\alpha_0} = (\partial\Sigma_0/\partial\alpha_0)$, és hasonlóan (5.111) és (5.114) következményeként $(\partial\Theta/\partial\alpha)|_{\alpha_0} = (\partial\Theta_0/\partial\alpha_0)$.

Figyelembe véve az (5.113) és az (5.114) összefüggések konkrét alakját, c_{s0}^2 minimális értéke az alábbi módon adható meg.

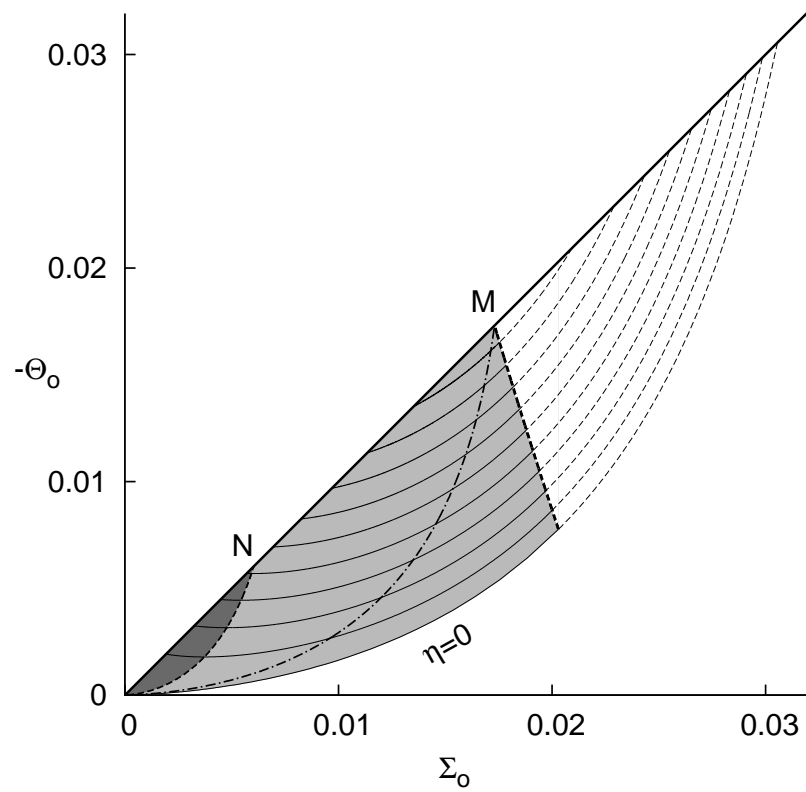
$$c_{s,\min}^2(\eta, \alpha_0) = \frac{4\alpha_0^2(1 - \alpha_0^{-1})^{3/2} - (3 - 6\alpha_0 + 4\alpha_0^2)(1 - \eta\alpha_0^2)^{3/2}}{4(3 - 5\alpha_0 + 2\alpha_0^2)(1 - \eta\alpha_0^2)^{3/2} + 8\alpha_0^2(\alpha_0^2\eta - 1)(1 - \alpha_0^{-1})^{3/2}}. \quad (5.118)$$

Ezen összefüggés segítségével, ha a hangsebességre valamilyen korlátozást rovunk ki, például hogy kauzalitási okokból ne legyen nagyobb, mint a fénysebesség, akkor az (η, α_0) síkon korlátozásokat kapunk a lehetséges stabil egyensúlyi gravastar konfigurációkra. A 14. ábrán az egyensúlyi gravastarok paraméterterét ábrázoltuk és a stabilitási tartományok jellemzését is adjuk. Az egyensúlyi térkép részletes ismertetését az ábra aláírásában találjuk.

A 15. ábrán a gravastar térképét látjuk egy másik reprezentációban. A $(\eta, \alpha_0) \mapsto (\Sigma_0(\eta, \alpha_0), \Theta_0(\eta, \alpha_0))$ leképezés által. A 15. ábra azért hasznos, mert ezen a síkon ábrázolódik az állapotegyenlet is. Mivel stabil egyensúlyban lévő gravastar a szürke tartományban lehet csak, ezért rögtön látjuk, hogy ez a lehetséges állapotegyenletre is korlátozást ad, hiszen az állapotegyenletet reprezentáló görbe nem haladhat végig fehér tartományon, például zérus nyomású por nem alkothatja a gravastart, mert az ahhoz tartozó állapotegyenlet görbe az origóból induló vízszintes vonal, amely kikerüli a szürke tartományt. Ha pedig rábökünk a szürke tartomány egy pontjára, és feltesszük, hogy a gravastar ott stabil egyensúlyi helyzetben van, akkor annak az a feltétele, hogy a hangsebesség legyen nagyobb, mint az $\eta = konst.$ görbe meredeksége az ábrán. Tehát az állapotegyenletnek át kell mennie a ponton, és nagyobb meredekséggel, mint az $\eta = konst.$ görbe az adott pontban. Még egy érdekesség, ami leolvasható az ábráról, hogy az $\eta = konst.$ görbék meredeksége pontosan $c_{s,\min}^2$, ezért ha speciálisan olyan lenne az állapotegyenlet, hogy az pont egy $\eta = konst$ görbén futna, akkor a gravastar neutrális egyensúlyi állapotba lenne. Ez persze csak a világosszürke tartományon belül tartható, mert a sötétszürke tartományban negatív a meredekség, azaz instabil lenne hidrodinamikailag a héj, a világosszürke tartomány jobb szélén pedig 45 fokos a meredekség, azaz a hangsebesség szuperluminálissá válik, attól jobbra már sérti a kauzalitást.



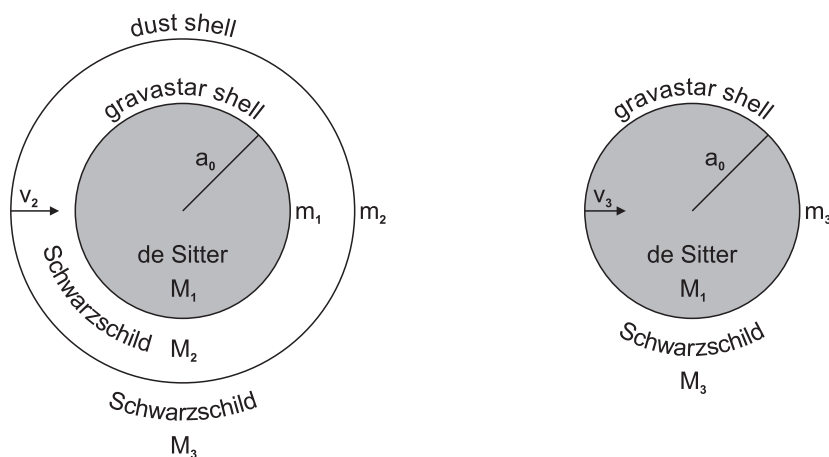
14. ábra. Gravastar egyensúlyi helyzeteinek térképe. Erre az ábrára úgy tekinthetünk, mint egy térképre az (η, α_0) paraméter síkon. A térkép minden pontja egy egyensúlyi konfigurációt reprezentál. A legfelső pontozott vonal alatti tartomány az a rész, ahol nem alakul ki a de Sitter belsőben „kozmológiai horizont”. A vastag pontozott vonalon a felületi energiasűrűsége zérus, alatta pozitív. Folytonos vastag vonallal az (5.115) által meghatározott görbe van ábrázolva, amely alatt teljesül a domináns energiafeltétel. Ez a görbe $\alpha_0 = 25/24$ -nél metszi a vízszintes tengelyt és az M pontban éri el a maximumát, melynek koordinátái $(\alpha_0, \eta) \approx (1.1503, 0.1944)$. A vastag szaggatott vonal azokat a konfigurációkat jelöli, melyekre $V''(\alpha_0) \equiv 0$, miközben $c_{s0}^2 = 1$. $c_s^2 = 1$ esetén stabil a konfiguráció, azaz $V'' > 0$ ezen görbe fölött, míg a görbe alatti konfigurációk instabilak. A vékony szaggatott vonal $V''(\alpha_0) \equiv 0$ konfigurációkat jelöli $c_{s0}^2 = 0$ esetén, és ez ugyancsak elválasztja a stabil állapotokat az instabilaktól $c_{s0}^2 = 0$ esetén. A vékony szaggatott vonal a vastag folytonos vonalat az N pontban metszi, melynek koordinátái $(\alpha_0, \eta) \approx (1.6470, 0.0855)$. A vastag szaggatott, a vékony pontozott-szaggatott és a vastag folytonos vonal egy pontban metszi egymást, M -ben. A világosszürke keskeny tartomány teljesíti a domináns energiafeltételt és bármilyen pozitív hangebesség esetén stabil egyensúlyi helyzet. A sötét- és világosszürke tartomány együtt azt a tartományt alkotja, amely teljesíti a domináns energiafeltételt, és a kauzalitást nem sértő lehető legnagyobb hangebesség esetén stabil az egyensúlyi helyzet.



15. ábra. Gravastar egyensúlyi helyzeteinek térképe II. Ezen az ábrán a $(\Sigma_0, -\Theta_0)$ síkon jellemezzük a gravastarok egyensúlyi helyzeteit. Ezen a síkon az állapotegyenlet egy görbével jellemezhető. Az $\eta = konst.$ görbék $\eta = 0$ -tól $\eta = 0.18$ -ig vannak reprezentálva, $\Delta\eta = 0.02$ közönként. A vonalstílusok és a tartományok színezése megegyezik a 14. ábrával.

5.3. Gravastar és porfelhő

Ebben az alfejezetben egy kezdetben egyensúlyban lévő gravastar stabilitását úgy vizsgáljuk, hogy a gravastar héjával koncentrikus gömbszimmetrikus porhétat ejtünk rá. Feltesszük, hogy az ütközés teljesen rugalmatlan és a gravastarra ejtett porhét részecskéi a gravastar felületébe olvadnak, és így az ütközés után is egy héjmodellel leírható gravastar alakul ki.



16. ábra. A folyamatot illusztráló ábrásor. Bal oldalon gravastar de Sitter belsejének teljes tömege M_1 és a sugara a_0 , míg a gravastart határoló Schwarzschild külső tömegparamétere M_2 a gravastar héjának saját tömege pedig m_1 . Az érkező porhét saját tömege m_2 . Jobb oldalon az ütközés után kialakuló új gravastar látható.

A 16. ábrának megfelelően a kezdeti gravastar teljes tömege legyen M_2 , amely értéket tömegegységként használunk, vagyis a kezdeti egyensúlyban lévő gravastar dimenziótlan paramétereit: $\alpha_0 = a_0/(2M_2)$ és $\eta = 8kM_2^2$. Feltesszük, hogy a gravastarra eső porhét gravitációs tömege εM_2 , ennek megfelelően a teljes rendszer tömege $M_3 = (1 + \varepsilon)M_2$. A gravastar héjának ütközés előtt és után, illetve a porhétnek a saját tömegét jelöljük a 16. ábra szerint m_1 , m_2 és m_3 értékekkel. Ha azt szeretnénk, hogy ne alakuljon ki esemény horizont a rendszerben mielőtt a porhét a gravastar felületére érne, akkor fel kell tennünk, hogy $\varepsilon < \alpha_0 - 1$. A porhét sebességére vonatkozóan két határesetet fogunk megvizsgálni. Az egyik eset, amikor a porhét sebessége a végtelenben zérus, $v_2(\infty) = 0$, ekkor a porhét saját tömege és gravitációs tömege megegyezik $m_2 = \varepsilon M_2$, és a (2.28) mozgásegyenlet alapján azt kapjuk dimenziótlan változókkal, hogy

$$v_2 = -\frac{\sqrt{16\alpha_0 + 8\varepsilon\alpha_0 + \varepsilon^2}}{4\alpha_0}. \quad (5.119)$$

A másik eset, amelyet vizsgálni fogunk a $v_2(\alpha_0) = 0$ eset, amikor is nyugalomban helyezük rá a porhéjat a gravastarra. Ez természetesen a valóságban nem fordulhat elő, hiszen akkor a porhéjnak a múltja, nem lehetne olyan, hogy a gravastaron kívülről érkezik, azonban határesetként tanulmányozzuk ezt az esetet is, mert egy valóságos szituáció valószínűleg a fenti két eset közé esik.

5.3.1. Ütközés

Feltesszük, hogy a gravastarra (stabilitásvizsgálat céljából) ejtett porhéj a gravastar felületét alkotó héjjal teljesen rugalmatlanul ütközik. A kimenő ütközés után kialakuló új gravastar $v_3 = da/d\tau_3$ kezdősebességét a gömbhéjak teljesen rugalmatlan ütközésére a 3.2. alfejezetben levezetett képlet alapján kapjuk. Eszerint, ha $v_2 = 0$ az ütközés helyén, akkor $v_3 = 0$. Amikor $v_2(\infty) = 0$, akkor a ráeső porfelhő saját tömege és gravitációs tömege megegyezik, vagyis a 3.2. alfejezet jelöléseit alkalmazva (ahol az 1-es héj a gravastar felülete és 2-es héj a ráeső porhéj): $m_2 = \varepsilon M_2$, $m_3 = 4\pi(\alpha_0 2M_2)^2 \Sigma_3 / M_2$, $f_2 = 1 - 1/\alpha_0$, $g_1 = M_2(1 - \eta\alpha_0^3)$ és (5.119). Mindezeket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$v_3 = -\frac{4\pi \Sigma_0^2 (\alpha_0 - 1) \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 8\varepsilon\alpha_0 + 16\alpha_0}}{\Sigma_3 (1 - 2\eta\alpha_0^3 + \eta^2\alpha_0^6 - 4096\pi^4\alpha_0^6\Sigma_0^4)}. \quad (5.120)$$

A fenti képletet írjuk az alábbi formába

$$v_3 = \frac{8\pi\alpha_0 F(\eta, \alpha_0, \varepsilon)}{\Sigma_3}, \quad (5.121)$$

ahol

$$F(\eta, \alpha_0, \varepsilon) = -\frac{\Sigma_0(\eta, \alpha_0)^2 (1 - 1/\alpha_0) (\varepsilon/2) \sqrt{16\alpha_0 + 8\varepsilon\alpha_0 + \varepsilon^2}}{1 - 2\eta\alpha_0^3 + \eta^2\alpha_0^6 - 4096\pi^4\alpha_0^6\Sigma_0(\eta, \alpha_0)^4}. \quad (5.122)$$

Itt $\Sigma_0(\eta, \alpha_0)$ az eredeti egyensúlyban lévő gravastar dimenziótlan felületi energiasűrűsége, amely (5.113) képlettel adott. Az ütközési egyenlet másik tagja ekvivalens a gravastar mozgásegyenletével. Az újonnan kialakuló gravastarra felírva a mozgásegyenletet, figyelembe véve, hogy továbbra is a régi gravastar teljes M_2 tömege az egység a dimenziótlan változókhoz, azt kapjuk például, hogy

$$\Sigma_3 = \frac{\sqrt{1 - \eta\alpha_0^2 + v_3^2} - \sqrt{1 - (1 + \varepsilon)/\alpha_0 + v_3^2}}{8\pi\alpha_0}. \quad (5.123)$$

ahol $\Sigma_3 = \sigma_3 M_2$. Az (5.121) összefüggést az (5.123) egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\Sigma_3 = \sqrt{A(\eta, \alpha_0)^2 + \frac{F(\eta, \alpha_0, \epsilon)^2}{\Sigma_3^2}} - \sqrt{B(\alpha_0, \epsilon)^2 + \frac{F(\eta, \alpha_0, \epsilon)^2}{\Sigma_3^2}}, \quad (5.124)$$

ahol

$$A(\eta, \alpha_0) = \frac{\sqrt{1 - \eta\alpha_0^2}}{8\pi\alpha_0}, \quad (5.125)$$

$$B(\alpha_0, \epsilon) = \frac{\sqrt{1 - (1 + \epsilon)/\alpha_0}}{8\pi\alpha_0}, \quad (5.126)$$

Az (5.124) algebrai reláció pozitív gyöke Σ_3 -ra:

$$\Sigma_3 = \sqrt{A^2 + B^2 - 2\sqrt{A^2 B^2 + F^2}}, \quad (5.127)$$

Végül megjegyezzük, hogy abban az esetben, ha $v_2 = 0$, akkor (5.127) helyett $\Sigma_3 = \Sigma_0(\epsilon + 1)$.

5.3.2. Kialakuló új gravastar

Az előző alfejezetben kifejtett ütközési egyenletek alapján a kialakuló új gravastar Σ_3 és v_3 kezdő paraméterei meghatározhatók. Azonban ahhoz, hogy a tovább tudjuk követni a gravastar mozgását, szükségünk van az ütközés után érvényes állapotegyenletre, hogy meg tudjuk határozni az energiasűrűséget a sugár függvényében, amellyel az új potenciálfüggvényt számoljuk.

Mivel a gravastar egy hipotetikus modell, és semmiféle megfigyelési eredményre nem támaszkodhatunk, csak feltételezésekkel élhetünk az állapotegyenletre vonatkozóan. Két határesetet azonban könnyen meg tudunk vizsgálni. Mivel a ráeső porhéjban a nyomás zérus, ezért az egyik kézenfekvő feltételezés, hogy az ütközés során a felületi feszültség nem változik, amit arra alapozhatunk, hogy az ütköző két héj parciális nyomásai összeadódnak. Ugyanakkor jobb közelítés, hogy az állapotegyenlet marad változatlan, ugyanis teljesen rugalmatlan ütközés feltételezi, hogy erős kölcsönhatás van a két héj részecskéi között, és így inkább az összeolvadás analógiája a helytálló.

Az új effektív potenciál meghatározásához a korábbi (5.112) képletet használjuk, de új dinamikai változókat kell használnunk, amelyeket hullámos vonallal jelzünk. Az új gravastar teljes tömege $\tilde{\eta} = (1 + \epsilon)^2 \eta$. A referencia egység M_2 helyett $M_3 = (1 + \epsilon)M_2$. Ennek megfelelően a dimenziótlan sugár

és felületi energiasűrűség is átskálázódik: $\tilde{\alpha} = \alpha/(1 + \varepsilon)$ és $\tilde{\Sigma} = (1 + \varepsilon) \Sigma$. Mindezeket összekombinálva

$$\tilde{V}(\alpha; \eta) = V((1 + \varepsilon)^2 \eta, (1 + \varepsilon) \Sigma_{\text{új}}(\alpha), \alpha/(1 + \varepsilon)). \quad (5.128)$$

ahol $\Sigma_{\text{új}}(\alpha)$ a (2.34) megoldás a $\Sigma_{\text{új}}(\alpha_0) = \Sigma_3$ kezdőfeltétellel, feltételezve azt, hogy az állapotegyenlet változatlan.

5.3.3. Alkalmazott algoritmusok

Előszöris megjegyezzük, hogy amennyiben a ráeső porhéj nem zérus sebességgel érkezik, úgy a kialakuló új gravastar sebessége befele fog irányulni, ezért a potenciál vizsgálatát azzal kezdjük, hogy megnézzük van-e gyöke az $\alpha \in [1, \alpha_0]$ intervallumban, ha van, azt α_1 -el jelöljük. Ezt egy numerikus maximumkereső algoritmussal vizsgáljuk, és amennyiben a maximum negatívnak adódik, úgy megállapíthatjuk, hogy a gravastar fekete lyukká esik össze. Egy intervallumfelező algoritmus segítségével változtatva a ráejtett tömeget, meghatározhatjuk azt a maximális tömeget, $\varepsilon_{\text{max}} \cdot M_2$, amely még ráejthető a gravastarra, anélkül, hogy fekete lyukká esne össze. Azokban az esetekben, amikor nem omlik fekete lyukká, meghatározzuk a dinamikai tartomány felső felét is, azaz az α_0 -nál nagyobb első zérushelyét a potenciálnak, amelyet α_2 -vel jelölünk. A kialakuló mozgás során $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ teljesül.

Abban az esetben, amikor a porfelhőt zérus sebességgel helyezük a gravastarra, akkor a dinamikus tartomány egyik széle α_0 -al megegyezik, és a potenciál deriváltja dönti el, hogy befele vagy kifelé kezd el mozogni a gravastar.

Általános esetben ez egy sokparaméteres probléma. Ha rögzítjük az állapotegyenletet minden paraméterével együtt, akkor η függvényében a stabil egyensúlyi állapothoz tartozó α_0 meghatározható. Ehhez nem kell mást tenni, mint a 15. ábrára felrajzolni az állapotegyenlet görbét, és az adott η szintvonalal vett metszetét meghatározni. Feltéve, hogy az állapotegyenlet ütközés után változatlan meghatározhatjuk a gravastarra maximálisan ráejthető tömeget. Ezt az eljárást fogjuk követni három különböző típusú állapotegyenlet esetében: homogén lineáris, törött lineáris és politróp.

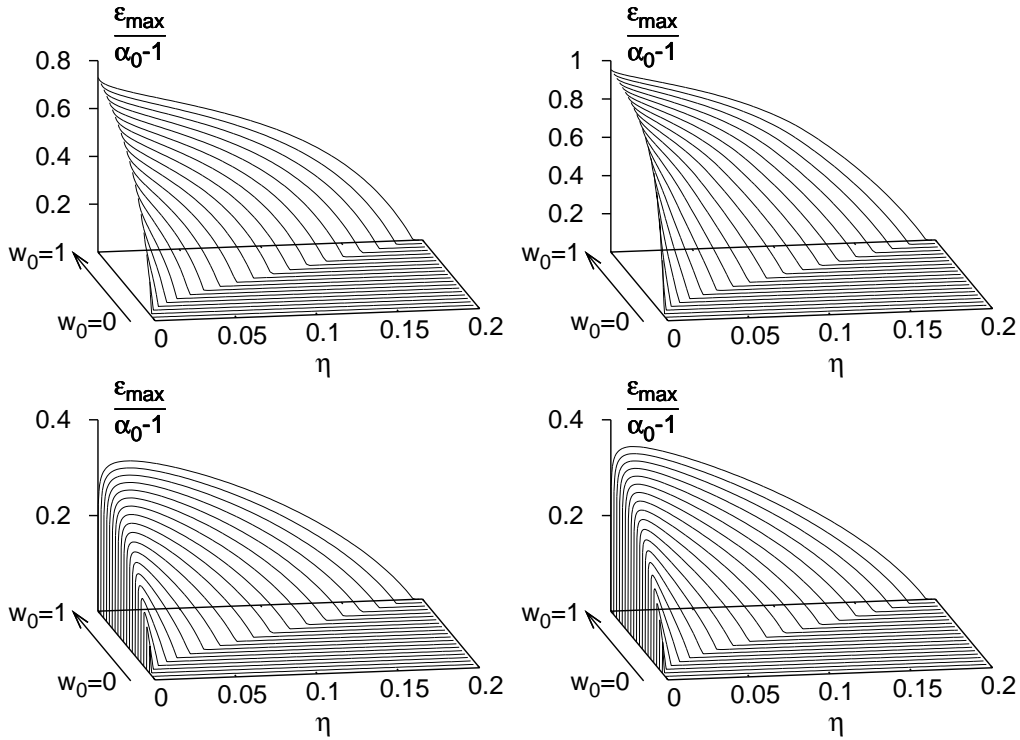
5.4. Numerikus eredmények

A kialakuló új gravastar konfigurációt leíró effektív potenciál numerikus vizsgálatával alapvetően kétféle kérdésre keressük a választ a stabilitással kapcsolatban. Ha a kialakuló új gravastar potenciálja olyan alakú, mint a 2-es görbe a 13. ábrán, akkor a rendszer korlátos mozgást végez, és egy dinamikus oszcilláló gravastart kapunk. Ebben az esetben meghatározhatjuk

a rendszer minimális és maximális sugarát. Ha azonban a ráeső tömeg el-
 ér egy kritikus értéket, akkor a kialakuló új rendszer fekete lyukká omlik
 össze, célunk meghatározni ezt a kritikus tömeg értéket. Egy ilyen kritikus
 rendszerhez tartozó potenciál olyan alakú, mint a 3-as görbe a 13. ábrán.

5.4.1. Homogén lineáris eset

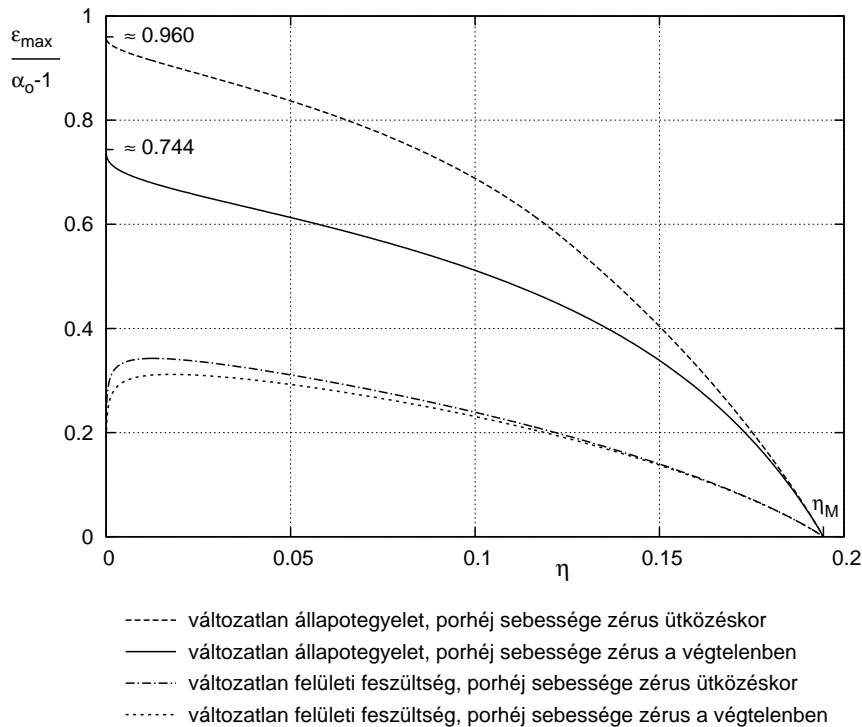
A legegyszerűbb egy paraméteres állapotegyenlet a homogén lineáris. Ha
 megadjuk η és w_0 értékét, akkor a lehetséges α_0 egyensúlyi sugár egyértel-
 műen meghatározódik az implicit $w_0 = -\Theta_0(\eta, \alpha_0)/\Sigma_0(\eta, \alpha_0)$ reláció alapján.
 Jól látható a 15. ábrán, hogy adott $w_0 = c_s^2 \in [0, 1]$ értékre a $w_0 \Sigma_0 + \Theta_0 = 0$
 egyenlettel adott egyenes az η konstans görbékét legfeljebb két pontban met-
 szti. Ezek közül a kisebbik Σ_0 érték stabil egyensúlyi konfigurációhoz tartozik,



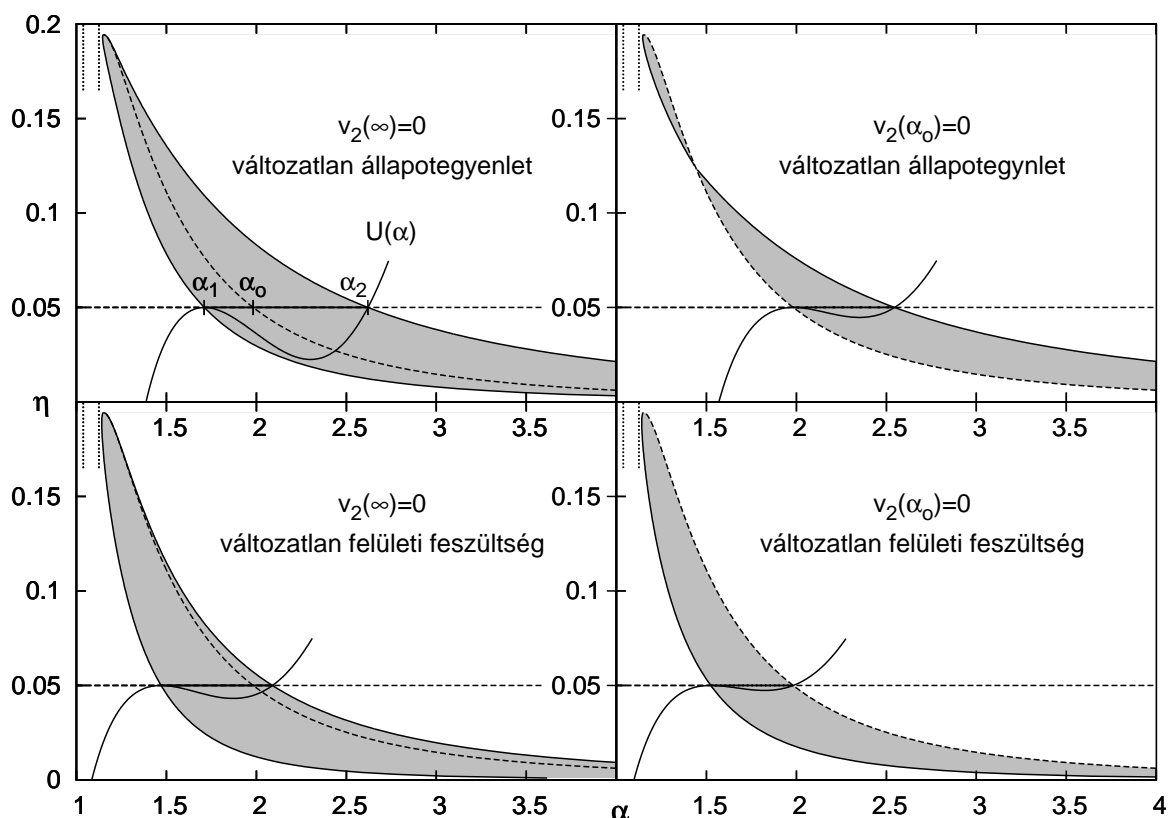
17. ábra. Homogén lineáris állapotegyenletű gravastarra ejthető maximális tömeg.
 A ráejthető maximális tömeg $\varepsilon_{\max}/(\alpha_0 - 1)$ normalizált értéke látható η és w_0
 függvényében. A gravastar kezdeti α_0 egyensúlyi sugara adott η esetén a domináns
 energiafeltétel által megengedett maximum. A felső két panelen a ráejtett porfelhő-
 ről feltételezzük, hogy $v_2(\infty) = 0$, míg az alsó paneleken $v_2(\alpha_0) = 0$. A bal oldaliak
 esetében továbbá feltettük, hogy az állapotegyenlet nem változik az ütközés során
 míg a jobb oldaliak esetében a felületi feszültségről tesszük fel ugyanezt.

míg a másik instabilhoz. Adott (η, w_0) pároshoz tehát meghatározható α_0 és az ehhez a sugárhoz tartozó gravastar konfigurációnak megvizsgálhatjuk a stabilitását, oly módon, hogy meghatározzuk legfeljebb mekkora tömegű porháj ejthető rá anélkül, hogy fekete lyukká omlana össze. Ezeknek a számításoknak az eredményei láthatók a 17. ábrán különféle esetekben. Az ábrával kapcsolatban megjegyezzük, hogy a stabil kiindulási konfigurációra $w_0 = c_s^2$ értékének nagyobbak kell lennie, mint az (5.118) egyenlet által megadott érték, ezért w_0 értékészlete csak $\eta = 0$ veszi fel a teljes $[0, 1]$ intervallumot. Megjegyezzük továbbá, hogy ε_{\max} értékének $\alpha_0 - 1$ értékénél kisebbnek kell lennie, ugyanis ellenkező esetben a porhájból és a gravastarból álló rendszer még a porhájnak a gravastar felületére érkezése előtt az eseményhorizonton belülré kerülne. A fenti okokból $\varepsilon_{\max}/(\alpha_0 - 1)$ normált értéket ábrázoltuk.

Mivel a homogén lineáris állapotegyenletnek egyetlen paramétere van, ezért lehetőségünk van két esetet megvizsgálni, nevezetesen azt, amikor az állapotegyenlet w_0 meredeksége, illetve amikor a felületi feszültség marad változatlan az ütközés során, hiszen mindkét esetben meghatározódik az ál-

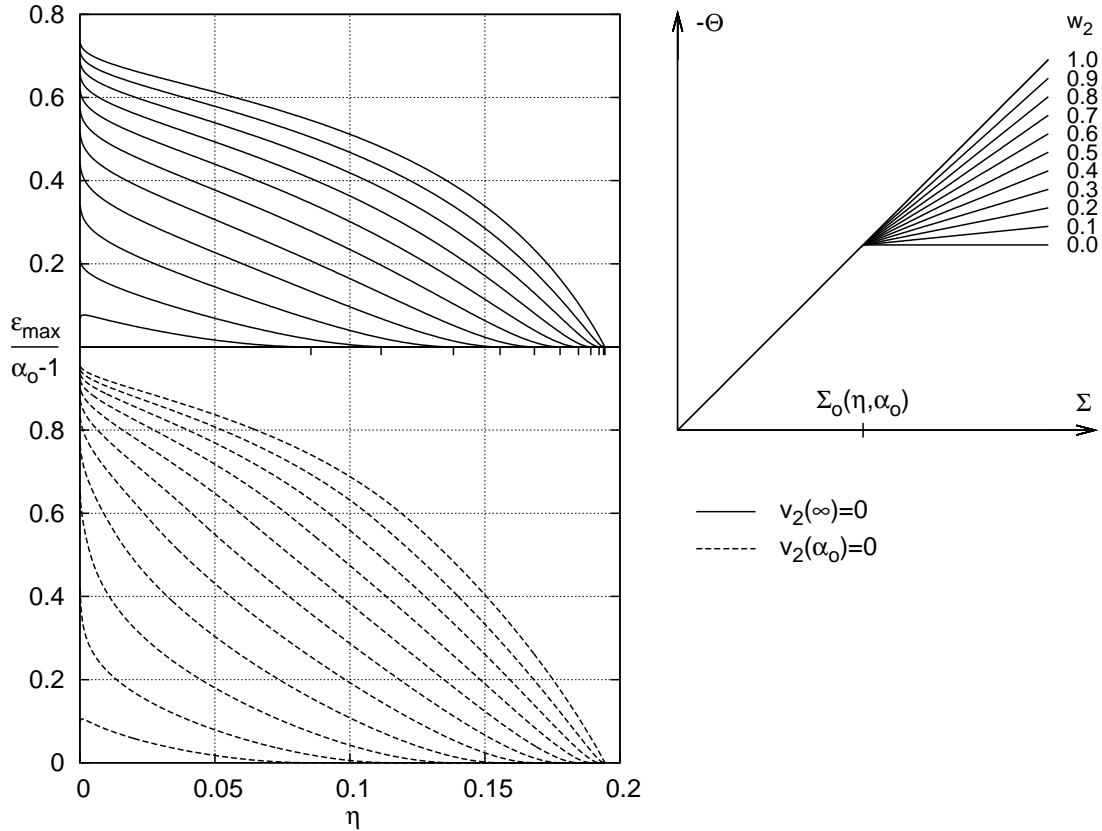


18. ábra. $w_0 = 1$ metszet. Ezen az ábrán a 17. ábra $w_0 = 1$ metszetét láthatjuk. Nincs több információ ezen az ábrán, csak a jobb összehasonlítás kedvéért ábrázoltuk külön a maximális w_0 esetén az eredményeket.



19. ábra. Maximálisan terhelt gravastar dinamikus tartománya. A fenti ábrákon a maximálisan terhelt $w_0 = 1$ lineáris állapotegyenletű gravastar konfigurációk dinamikus tartománya látható a korábbi ábrán látható négy esethez megfelelően, azonos sorrendben. Adott η esetén az $\eta = konst.$ vízszintes metszetei a szürke régióknak megadják a dinamikus tartományt. A szürke tartomány felső burkoló görbéje tehát a dinamikus tartomány felső részét, azaz α_2 -t ábrázolja míg az alsó burkoló görbe az α_1 -t ábrázolja. A kezdeti egyensúlyi gravastar egyensúlyi sugarát α_0 -at a szaggatott vonal jelöli. Amikor a kezdősebesség nem zérus, akkor ez a szaggatott görbe a szürke tartomány belsejébe esik, míg zérus kezdősebesség esetén a tartomány valamelyik szélére esik. Illusztrálandó a különböző esetekben releváns potenciálokat, az $\eta = 0.05$ értékhez tartozó potenciálokat ábráztuk mind a négy grafikonon azonos egységekben. A függőleges pontozott rovátkák a nagyobb $\alpha = 9/8$ Buchdahl limitet és az $\alpha \approx 1.0384$ értéket jelölik, lásd táblázat később. A jobb felső ábrán láthatunk egy érdekes pontot, ahol a szürke tartomány metszi önmagát. Ennek koordinátái $(\eta, \alpha_0) = (0.124, 1.44)$. Ebben a pontban a gravastar éppen nyugalomban marad, ha ε_{\max} -nak megfelelő tömeg érkezik a felületére. Ha $\eta > 0.124$, akkor a gravastar befele mozdul a ráeső tömeg hatására, egyébként kifelé.

lapotegyenlet, ez utóbbi esetben a $\tilde{w}_0 = \Theta_0/\Sigma_3$ reláció által. Ha ehhez még hozzávesszük, hogy vizsgáljuk a beérkező sebességre vonatkozó két szélsőértéket, akkor összesen négy esetet vizsgálunk. Jól látható a 17. ábrán, hogy a domináns energiafeltétel által megengedett legnagyobb $w = 1$ érték esetén kapjuk a legstabilabb konfigurációkat, rögzített η mellett mind a négy esetben. Megjegyezzük, hogy a $w_0 = 1/3$ érték az ultrarelativisztikus gáz állapotegyenletének felel meg háromdimenzióban, ugyanakkor a dimenzió-redukció miatt ebben a modellben ez $w_0 = 1/2$ -nek felel meg [126] szerint. A 19. ábrán a maximálisan terhelt gravastarok mozgástartományát láthatjuk az említett négy esetben $w_0 = 1$ mellett, és megállapíthatjuk, hogy a dinamikai tartomány legbelső részén sem érik el a gravastarok a legkompaktabb hagyományos csillagok mértét.

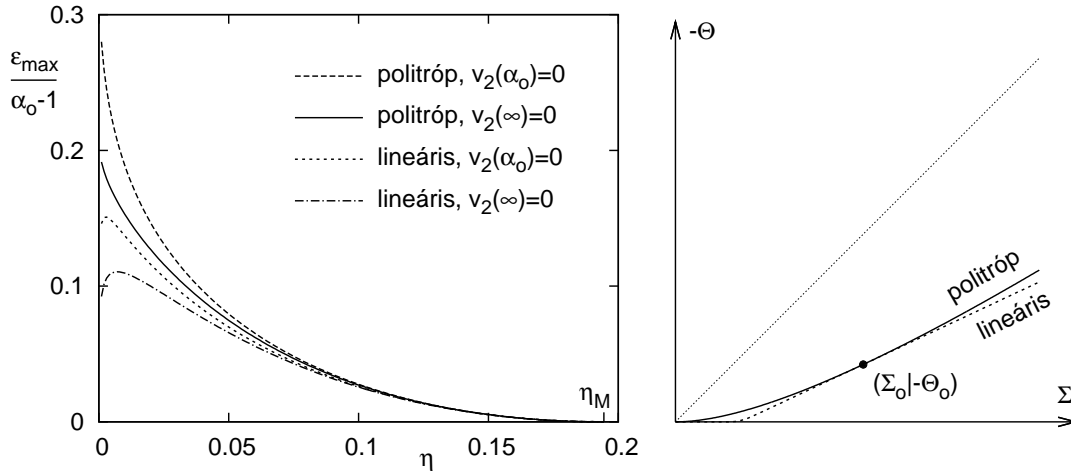


20. ábra. Törött lineáris állapotegyenletű gravastarra ejthető maximális tömeg. $w_0 = 1$ egyensúlyi gravastarok vizsgálata változó $c_{s0}^2 = w_1$ meredekséggel, azaz hangsebességgel. α_0 most is úgy van választva, hogy adott η esetén a domináns energiafeltétel által megengedett maximális érték legyen. w_2 értéke 1-től csökken zérusig 0.1 nagyságú lépésekkel.

5.4.2. Törött lineáris eset

Mivel a gravastar sugara közvetlenül az ütközés után csökken, ezért a felületi energiasűrűség nő. Ebből az következik, hogy az effektív potenciál ezen a tartományon az állapotegyenletnek a $\Sigma > \Sigma_0$ részétől függ. Adott állapotban lévő gravastar esetében meg akarjuk vizsgálni, hogy a hangsebességtől hogyan függ a stabilitás. Ehhez pont megfelelő a törött lineáris állapotegyenlet, mert adott ponton átmenve tudjuk változtatni a meredekségét.

A 20. ábrán a $w_1 = 1$ esetet vizsgáltuk, a releváns részen pedig a hangsebességet zérustól a maximális $w_2 = 1$ értékig változtattuk. A felső ábrán folytonos görbesereggel az az eset látható, amikor a porháj kinetikus energiája a végtelenben zérus, alatta pedig, szaggatott görbesereggel, az a szélső eset, amikor a porháj radiális sebessége a gravastar felületén zérus. Ezek az eredmények is azt mutatják, hogy adott η és α_0 értékek mellett a nagyobb hangsebességű állapotegyenlet szolgáltatja a stabilabb konfigurációt abban az értelemben, hogy nagyobb tömegű porfelhőt bír el a gravastar.



21. ábra. *Politróp állapotegyenletű gravastarra ejthető maximális tömeg.* $c_{s0} = w_0$ feltételt kielégítő egyensúlyi gravastarok vizsgálata $\kappa = 2$ politróp állapotegyenlettel, és az összehasonlítás az egyensúlyi helyzetben azonos meredekségű (törött) lineáris állapotegyenlettel. Minden η értékre α_0 értékét úgy kapjuk, hogy meghatározzuk az $\eta = konst.$ görbe és a pontozot-szaggatott görbe metszéspontját a 14. ábrán. A normalizált $\varepsilon_{\max}/(\alpha_0 - 1)$ maximálisan ráejthető tömeg η függvényében van ábrázolva kétféle állapotegyenlet és kezdősebesség esetén (a ráejtett porhájra vonatkozóan: $v_2(\infty) = 0$ és $v_2(\alpha_0) = 0$).

5.4.3. Politróp eset

A politróp állapotegyenletnek két változtatható paramétere van: az A amplitúdó és a κ hatánykitevő. Ha egy tetszőleges (Σ_0, Θ_0) ponton át szeretnénk megadni politróp állapotegyenletet, ahol $0 < |\Theta_0| < \Sigma_0$, akkor az nem minden κ értékre megvalósítható. Ha azonban $\kappa = 2$ választással élünk akkor mindig van megfelelő A amplitúdó és csak akkor. Érdekes ezért a $\kappa = 2$ esetet vizsgálni. Ez még azért is célszerű, mert rögzített A esetén ez adja a legstabilabb konfigurációkat.

A 21. ábrán a $\kappa = 2$ politróp állapotegyenletű esetet azzal a lineáris állapotegyenletű esettel hasonlítottuk össze, amelynek azonos a meredeksége, azaz hangsebessége az adott Σ_0 pontban. Mivel a politróp állapotegyenlet konkáv, ezért az adott pontban mindig nagyobb a meredeksége, mint a lineárisnak. A várakozásoknak megfelelően azt láthatjuk az ábrán, hogy az azonos meredekségű lineáris állapotegyenlethez képest a politróp állapotegyenletű gravastarra nagyobb tömeget ejthetünk, azaz ebben az értelemben stabilabb, és ennek az az oka, hogy a politróp állapotegyenlet meredeksége Σ -val monoton nő.

5.5. Buchdahl-típusú korlátok

A gravastar tulajdonképpen egy csillagmodell, amely arra hívatott, hogy elkerülje a fekete lyukká válást, így jogos a kérdés, hogy gravastarok mennyire kompaktnak lehetnek, vagyis adott tömeg mellett milyen kicsi lehet a sugárjuk, és ez hogyan viszonyul más csillagmodellek kompaktságához? Ennek a kompaktságnak a szokásos mérőszáma a $2m_\star/r_\star$ -arány¹⁶, ahol m_\star a csillag tömege és r_\star a csillag sugara. Klasszikus csillagmodellek esetén a kompaktság többnyire maximummal rendelkezik, és ezek a maximumok az ún. Buchdahl típusú határértékek. Természetesen nem minden csillagmodell rendelkezik éles határfelülettel, ebben az esetben az $2m_\star(r)/r$ függvény rendelkezik maximummal, ahol $2m_\star(r)$ az r sugáron belüli tömeg. Ezek a határértékek a mérések szempontjából is fontosak, mert a tömeg és a sugár viszonylag jól mérhető egyszerű paraméterei a csillagnak, és a megfigyelt arányukból következtethetünk arra, hogy mit látunk. Ha például túl nagyok adódik az említett arány egy adott csillagmodellhez, amelyben valamilyen feltételezéssel élünk a csillag anyagára vonatkozóan, akkor biztosak lehetünk abban, hogy a csillag valamilyen más anyagból áll. Ha pedig az arány eléri az eseményhorizontnak megfelelő 1-es értéket, akkor nagy a valószínűsége, hogy fekete lyukat „látunk”. A Buchdahl típusú határértékekre vonatkozó elméleti

¹⁶ $G = c = 1$ egységekben.

modell	korlátozások	R_{\min}/R_S	képlet
[123]	$p_r = 0$	1,500	3/2
Buchdahl [124]	$p_r = p_t, \varrho \searrow$	1,125	9/8
Vlasov–Eistein [125, 127]	$p_r + 2p_t \leq \varrho$	1,125	9/8
DEC + izotrópia [127]	$p_r = p_t \leq \varrho$	1,156	
DEC [127]	$p_r, p_t \leq \varrho$	1,038	
[127]	$p_t \leq \varrho$	1,036	$5(\sqrt{2} - 1)/2$
izotrópia [128, 127]	$p_r = p_t$	1,030	$(4 + 3\sqrt{2})/8$

1. táblázat. *Buchdahl-típusú korlátok.* Az első oszlopban a modell csoportokat láthatjuk a hozzájuk tartozó hivatkozásokkal. A második oszlopban a modellre jellemző korlátozás szerepel. A radiális és tangenciális nyomást rendre p_r -vel és p_t -vel jelöljük, az energiasűrűséget pedig ϱ -val, és mindegyikről feltételezzük, hogy nem negatívak. Buchdahl eredeti cikkében konstans sűrűségre látta be a 9/8-os korlátot, azonban eredménye radiálisan monoton csökkenő tömegsűrűségre is fennáll, ezt jelöli a \searrow szimbólum a táblázatban. A harmadik oszlop tartalmazza a sugár legkisebb értékét Schwarzschild-sugár egységekben három tizedes jegyre pontosan. Ha van ennek az értéknek analitikusan kifejezhető formája, akkor azt az utolsó oszlopban tüntettük fel. A táblázatban szereplő összes érték éles korlát, abban az értelemben, hogy az adott feltételek mellett megszorítóbb korlátozást nem lehet adni, vagyis létezik olyan konfiguráció, amely esetén egyenlőség áll fenn.

eredményekre hagyományos csillagmodellek esetében egy kiváló áttekintést ad Paschalis Karageorgis és John G. Stalker cikke [127], amelyet a táblázatban foglalunk össze. Az táblázatban szereplő adatok mind gömbszimmetrikus statikus csillagmodellekre vonatkoznak és mindegyik határérték éles, azaz a megadott feltételek mellett egyenlőség is lehetséges. A bizonyítások megtalálhatók ugyancsak az említett cikkben [127], egy általános módszer alapján.

Mivel a fenti táblázat egyensúlyban lévő csillagokra vonatkozik, melyek nem feltétlenül stabilak, ezért az adatokat az egyensúlyban lévő gravastarral érdemes összehasonlítani. Egyensúlyban lévő gravastarra a domináns energiefeltétel mellett azt kaptuk éles korlátnak, hogy $\alpha_0 > 25/24 = 1.041\bar{6}$. Ha áttérünk a táblázatban feltüntetett számok reciprokára, akkor a domináns energiefeltétel melletti érték normál csillagokra a fenti táblázat szerint

0.963.¹⁷, amely érték a $24/25 = 0.96$ értéknél csak néhány ezreddel nagyobb. Ez alapján tehát, azt kapjuk, hogy konvencionális csillagok ugyanakkora tömeggel kisebbek lehetnek, mint a gravastar, tehát a kérdés nem az, hogy a gravastar megkülönböztethető-e egy fekete lyuktól, hanem az hogy egy ilyen tömör csillagtól meg lehet-e különböztetni. Sőt a porfelhő ráejtésével végzett stabilitás vizsgálatból az látszik az ábra alapján, hogy a dinamikus gravastar esetében is nagyobb marad a gravastar sugara, mint ez az érték.

5.6. Összefoglalás

Összefoglaltuk a Visser és Wiltshire féle gravastar héjmodellt. Az egyensúlyi helyzetben lévő gravastarok teljes jellemzését adtuk a paramétertérben, lásd a 14. ábra. Fontos észrevétel, hogy a domináns energiafeltétel teljesülése esetén a legkisebb méretű gravastar sem lehet olyan kicsi, mint a legkisebb méretű hagyományos csillagmodell. Radiális dinamikai stabilitás vizsgálatot végeztünk azáltal, hogy szimuláltuk a gravastar viselkedését abban a szituációban, amikor egy koncentrikus porfelhőt ejtünk a felületére, amely a kéreggel teljesen rugalmatlanul ütközik. Ez egy új módszer, amely kvalitatív jellemzését adja a stabilitásnak. Számos állapotegyenlet esetén vizsgáltuk a maximálisan ráejthető tömeget, és a maximálisan terhelt gravastar dinamikus tartományát. Homogén lineáris állapotegyenlet esetén két eset vizsgáltunk: amikor az ütközés után kialakuló rendszerben a kéreg állapotegyenlete változatlan, illetve amikor a felületi feszültség marad változatlan. Emellett vizsgáltuk a beesési sebesség két szélső értékét. Azt láttuk, hogy a domináns energiafeltételnek megfelelő állapotegyenletek közül a $w = 1$ paraméterű homogén lineáris adja a legstabilabb gravastart, illetve tetszőleges gravastar esetében a lehetséges legnagyobb hangsebességű állapotegyenlet stabilizálja legjobban a gravastart. Azt kaptuk a maximális meredekségű homogén lineáris állapotegyenletre, hogy a nem statikus gravastarok mozgásuk során sem kerülhetnek beljebb, mint a klasszikus csillagmodellekre vonatkozó Buchdahl-limit.

¹⁷Ez az érték három tizedes jegyre pontos [127] szerint.

Kitekintés

Az eredmények összefoglalása megtalálható az egyes fejezetek végén. Ezen eredmények tükrében a kitekintésben arra szeretnék röviden kitérni, hogy az eredmények kapcsán milyen további kérdések merülhetnek fel, amelyek alapján felvázolható, hogy milyen irányban érdemes tovább folytatni a munkát ezen a területen.

Elsőként jegyezzük meg, hogy a gyors C++ programcsomag segítségével számos más rendszer vizsgálata is elvégezhető, amelyek a bevezető fejezetben felsorolásra kerültek, hiszen a dinamikai egyenletek a felsorolt esetekben formálisan ugyanazok. Ha a dinamikában módosításra lenne szükség, az könnyen megtehető, hiszen a C++ forráskódok szabadon módosíthatók.

Doktori dolgozatom keretében három fő alkalmazással kapcsolatban értünk el eredményeket. Elsőként az akusztikus szingularitást vizsgálatuk sok héjból álló rendszerekkel. Ezek a vizsgálatok azonban por héj esetében adnak releváns eredményeket, hiszen nem lenne konzisztens feltételezni, hogy a részecskék között csak a felületre érintőleges kölcsönhatások hatnak, és radiálisan teljesen kölcsönhatás mentesen haladnak át egymáson. Érdemes lenne tehát a héjmodellt általánosítani radiális kölcsönhatás bevezetésével, illetve az ütközések típusát is általánosítani, hogy részlegesen transzparens ütközéseket is vizsgáljunk. A héjak kezdeti sebességeloszlását is tovább lehetne pontosítani összhangban a viriáltétellel. További érdekes kérdés, hogy a héjrendszerek belső relatív mozgása valóban kaotikus-e, és ha igen milyen értelemben és milyen Ljapunov-exponenssel? Ezen a téren elképzelhető, hogy a numerikus szimulációk mellett elméleti becsléseket is lehet adni. Hasonlóan érdekes kérdés, hogy az oszcillációk frekvenciáját meg lehet-e adni analitikusan, és vastag héj esetében ez mérhető-e bizonyos körülmények között egy valódi rendszerben.

Az eredmények másik része a tömeg infláció jelenségével kapcsolatos. Ezt a jelenséget kettőnél több héjból álló rendszer dinamikájával lehetne még behatóbban tanulmányozni. Elméleti megfontolásokkal összhangban a numerikus szimulációk is azt mutatják, hogy ilyenkor elsőként mindig a legbelső héj gravitációs tömege válik negatívvá. Úgy tűnik azonban, hogy mindig csak a belső héjnél lép fel az az anomália, és a külső héjak konvencionálisak módon viselkednek.

Az utolsó nagy terület, amit érintettünk a gravastarok dinamikája, és stabilitásuk vizsgálata. A gravastar egy hipotetikus csillagmodell, aminek stabilitását vizsgáltuk egyetlen porhéj ráejtésével. A továbbiakban vizsgálható lenne a gravastarok időbeli fejlődése, amint a gravastar folyamatosan anyagot szippant magába. Egy ilyen folyamat gömbszimmetria esetén modellezhető por héjak egymás utáni ütközésével. Azt is érdemes lenne megvizsgálni, hogy

mi történik, ha a beeső anyag nem teljesen rugalmatlanul ütközik, hanem egy része áthalad a gravastar kérgén. A gravastar egy hipotetikus modell, amely lehet, hogy a természetben nem létezik, lehetséges azonban, hogy az eseményhorizont elkerülésére nincs is szükség. Ettől függetlenül a centrumban fellépő görbületi szingularitás egy erősebb probléma, amely a klasszikus általános relativitáselméleten belül nem jól kezelhető. Világos, hogy a fellépő végtlen görbület csak akkor kerülhető el a klasszikus elméletben, ha a téridő de Sitter-szerűvé válik a központban. Ezen okfejtés alapján, amíg a kvantumgravitációnak nincs koherens elmélete, addig feltétlenül érdemes lenne megvizsgálni a egy ilyen kicsi de Sitter buborék dinamikáját homogén sűrűségű anyagban, amely közelebb vihet a szingularitások megértéséhez.

Summary

Relativistic infinitely thin spherical shells play an important role in various dynamical contexts ranging from microscopic to astrophysical systems [1-51]. A fast numerical C++ code was made to be capable of following the relativistic time evolution of systems comprising of great numbers of colliding shells with arbitrary equation of states. Whenever two shells collide the evolution is continued with the assumption that the collision is totally transparent or totally inelastic. Multi-layer shell systems are considered as approximate models of thick shells, and this makes it possible to study the formation and dynamics of acoustic singularities. The most important observations we have made can be characterized by the key phrases: concentrations of subsets of shells, formation of crusts' at the boundaries, reversing of the sides of gaps. The analytic setup is chosen such that the evolution even inside the black hole region can be carried out. This, in particular, allowed us to investigate the mass inflation phenomenon within the thin shell formalism. An estimate explaining the main features of the blow-up behavior of the mass parameter of the intermediate spacetime region is also provided.

There are more and more astrophysical observations justifying the existence of extremely compact massive objects with size close to their Schwarzschild radius. It is widely accepted that these observations also provide indirect justifications of the existence of black holes. Nevertheless, there are also alternative ideas about claiming that exotic states of matter may exist which could stabilize extremely compact stars. One of the most popular among these types of black hole mimicking objects is the gravitational vacuum star (gravastar) model which has received considerable attention not least because its relation to the concept of dark energy. In this model an interior de Sitter spacetime region is connected to an outer Schwarzschild solution such a way that no event horizon appears. In the last part of the dissertation the radial stability of gravastars is studied by determining their response to the arrival of a dust shell onto their surface. While in the analytic setup the equation of state is kept to be generic, in the numerical investigations three functionally distinct classes of equations of states are applied. In the corresponding particular cases the maximal mass of the dust shell that may fall onto a gravastar without converting it into a black hole is determined. For those configurations which remain stable the excursion of their radius is assigned. It is found that even the most compact gravastars cannot get beyond the lower limit of the size of conventional stars, provided that the dominant energy condition holds in both cases. It is also shown that the better is a gravastar in mimicking a black hole the easier is to destroy it.

Függelék

A. Gauss–Codazzi egyenletek és alkalmazásuk

A Gauss–Codazzi egyenletek a magasabb dimenziós téridő görbületi mennyiségei és a görbületi mennyiségek egyel alacsonyabb dimenziós hiperfelületre vett projekciói között fennálló összefüggések. Esetünkben a 3+1 dimenziós térre vonatkozó Gauss–Codazzi egyenleteket arra fogjuk használni, hogy egy hiperfelület közelében érvényes Einstein-egyenletek projekcióit a hiperfelületen érvényes mennyiségekre vonatkozó egyenletekké alakítsuk. A szükséges Gauss–Codazzi egyenletek az alábbiak

$${}^{(3)}R + K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} - K^2 = R - 2R_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta \quad (5.129)$$

$$D_\alpha K_\gamma^\alpha - D_\gamma K = R_{\alpha\beta}n^\alpha h_\gamma^\beta \quad (5.130)$$

ahol $R_{\alpha\beta}$ a téridő Ricci-tenzora, ${}^{(3)}R$ és R rendre a három és négydimenziós Ricci-skalár, n^α a hiperfelületre merőleges egységvektor, $h_\gamma^\beta = g_\gamma^\beta - n^\beta n_\gamma$ a hiperfelületre projektáló operátor, $K_{\alpha\beta} = h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \nabla_\mu n_\nu$ a hiperfelület külső görbülete, amelyet most a 4-es sokaságon definiálunk, $K = K_\alpha^\alpha$ a külső görbület spúrja, és végül D_α a $h_{\alpha\beta}$ indukált metrikához tartozó kovariáns deriváló operátor, melynek tulajdonságairól bővebben lásd Wald könyvének [52] 10.2.1 lemmáját. A fenti 4-es sokaságon értelmezett mennyiségek indexelésére a görög indexeket használjuk.

Az alábbi formában adott Einstein-egyenleteket

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (5.131)$$

rendre megszorozva és összegezve a $-2n^\alpha n^\beta$ és $n^\alpha h_\gamma^\beta$ mennyiségekkel felhasználva az (5.129) és az (5.129) és $n_\beta h_\gamma^\beta = 0$ összefüggéseket kapjuk, hogy

$${}^{(3)}R + K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} - K^2 = -16\pi T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta \quad (5.132)$$

$$D_\alpha K_\gamma^\alpha - D_\gamma K = 8\pi T_{\alpha\beta}n^\alpha h_\gamma^\beta \quad (5.133)$$

A fenti egyenletek közül az első egy skalár egyenlet, a második pedig egy kovektor egyenlet, amelyben az index négy különböző értéket vehet fel. Azonban a $h_{\alpha\beta}$ és $K_{\alpha\beta}$ tenzorok önmaguk projekciói, ezért nem zérus komponenseik csak a hiperfelülethez tartozó altérben vannak, hiszen $h_{\alpha\beta}n^\alpha = 0$ és $K_{\alpha\beta}n^\alpha = 0$. Gauss-féle normál koordinátákat választva az (5.133) egyenletnek a normálvektorhoz tartozó komponense triviálisan zérus, tehát az (5.133)

egyenlet független komponenseinek a száma csak három. Érdemes ezért a fenti egyenleteket átírni a hiperfelületen, mint alacsonyabb dimenziós sokaságon értelmezett mennyiségekre vonatkozó egyenletekké.

A hiperfelületen, mint 3-as sokaságon értelmezett mennyiségeket kis latin betűkkel indexeljük. Emlékeztetünk, hogy a $h_{\alpha\beta}$ a korábban bevezetett γ_{ab} 3-as metrikával az alábbi módon áll kapcsolatban

$$\gamma_{ab} = h_{\alpha\beta} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta \quad (5.134)$$

és hasonló módon írható fel a kapcsolat a három és négydimenziós reprezentáció között minden olyan tenzor esetében, melynek projekciója önmaga, azaz a külső görbület esetében is. Ez alapján könnyen belátható, hogy a külső görbület kontrakciók is azonosak a kétféle reprezentációban:

$$\begin{aligned} {}^{(3)}K &= h_{ab}K^{ab} = \left(h_{\alpha\beta} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta \right) K^{ab} = h_{\alpha\beta} \left(K^{ab} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta \right) = h_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} = {}^{(4)}K \\ K_{ab}K^{ab} &= \left(K_{\alpha\beta} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta \right) K^{ab} = K_{\alpha\beta} \left(K^{ab} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta \right) = K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (5.135)$$

ahol az első egyenletben kihasználtuk, hogy $h_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta}$. A fenti összefüggések alapján tehát az (5.132) helyett írhatjuk egyszerűsítve, hogy

$${}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2 = -16\pi T_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta, \quad (5.136)$$

ahol K -t számolhatjuk K_a^a szerint. Hasonló módon az (5.133) egyenletet megszorozva és összegezve $e_{(c)}^\gamma$ egység vektorral, azt kapjuk, hogy

$$D_a K_c^a - D_c K = 8\pi T_{\alpha\beta} n^\alpha e_{(c)}^\beta \quad (5.137)$$

Ez utóbbi két egyenlet mindegyike a hiperfelület mindkét oldalán lévő téridőkben felírható, így összesen nyolc egyenletünk van. Israel cikkét [53] követve vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\tilde{K}_{ab} = \frac{1}{2} (K_{ab}^+ + K_{ab}^-) \quad (5.138)$$

$$S_{ab} = -\frac{1}{8\pi} [K_{ab} - \gamma_{ab}K] \quad (5.139)$$

Megmutatható, hogy az ilyen módon bevezetett S_{ab} tenzor megfelel a felületi energia-impulzus tenzornak, lásd a [53] cikk függelékét. Vákuumban mozgó héj esetében, amikor $[T_{\alpha\beta}] = 0$, a fenti mennyiségek segítségével a téridő két felén érvényesek az (5.136) és az (5.137) egyenletek, melyekből összeadások és kivonások általi átrendezéssel az alábbi nyolc egyenletet tartalmazó ekvivalens egyenletrendszert kapjuk:

$$\tilde{K}_{ab}S^{ab} = 0 \quad (5.140)$$

$$D_a S^{ab} = 0 \quad (5.141)$$

$$D_a \tilde{K}_b^a - D_b \tilde{K} = 0 \quad (5.142)$$

$${}^{(3)}R + \tilde{K}_{ab}\tilde{K}^{ab} - \tilde{K}^2 = -16\pi (S_{ab}S^{ab} - \frac{1}{2}S^2) \quad (5.143)$$

Mivel a C. függelékben szükség lesz az (5.140) egyenletre, ezért ennek a levezetését külön kifejtjük. Ehhez az (5.136) egyenletet használjuk + és – indexek esetén, és képezzük a különbségeket a kétféle indexre. Bevezetve az $\{X\} = X|_+ + X|_-$ és $[X] = X|_+ - X|_-$ jelöléseket tetszőleges mennyiségekre, és kihasználva az $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ algebrai összefüggést, mely szerint

$$[K]\{K\} = [K^2] \quad (5.144)$$

$$[K_{ab}]\{K^{ab}\} = [K_{ab}K^{ab}] \quad (5.145)$$

kapjuk az alábbiakat:

$$\begin{aligned} [T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta] &= -\frac{1}{16\pi} [{}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2] = \\ &= -\frac{1}{16\pi} ([K_{ab}K^{ab}] - [K^2]) = \\ &= -\frac{1}{16\pi} ([K_{ab}]\{K^{ab}\} - [K]\{K^2\}) = \\ &= -\frac{1}{8\pi} ([K_{ab}] - h_{ab}[K]) \frac{1}{2} \{K^{ab}\} = \\ &= S_{ab}\tilde{K}^{ab} \end{aligned} \quad (5.146)$$

Abban az esetben, amikor a héjat mindkét oldalról vákuum határolja, $[T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta] = 0$, amelyből az (5.140) egyenlet adódik.

B. Külső görbület komponensei gömbszimmetria esetén

A (2.5) kifejezés alapján

$$\begin{aligned} K_{rr} &= \dot{R} \left(\ddot{T} + \Gamma_{tt}^t \dot{T}^2 + 2\Gamma_{tr}^t \dot{T} \dot{R} + \Gamma_{rr}^t \dot{R}^2 \right) \\ &- \dot{T} \left(\ddot{R} + \Gamma_{tt}^r \dot{T}^2 + 2\Gamma_{tr}^r \dot{T} \dot{R} + \Gamma_{rr}^r \dot{R}^2 \right) \end{aligned} \quad (5.147)$$

és

$$K_{\vartheta\vartheta} = \dot{R}\Gamma_{\vartheta\vartheta}^t - \dot{T}\Gamma_{\vartheta\vartheta}^r \quad (5.148)$$

ahol csak a nem zérus tagokat írtuk ki. A további kifejtéshez felhasználjuk, hogy a szükséges nem zérus Christoffel-szimbólumok az alábbiak

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}f^{-1}f' \quad (5.149)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2}ff' \quad (5.150)$$

$$\Gamma_{rr}^r = -\frac{1}{2}f^{-1}f' \quad (5.151)$$

$$\Gamma_{\vartheta\vartheta}^r = -fr \quad (5.152)$$

A fentieket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$K_{\tau\tau} = \dot{R},\ddot{T} - \dot{T}\ddot{R} - \frac{1}{2}ff'\dot{T}^3 + \frac{3}{2}\dot{T}\dot{R}^2 \quad (5.153)$$

$$K_{\vartheta\vartheta} = fR\dot{T} \quad (5.154)$$

$K_{\tau\tau}$ kifejezést tovább egyszerűsíthetjük. Felhasználva, hogy

$$\dot{T}^2 = f^{-1} + f^{-2}\dot{R}^2 \quad (5.155)$$

kapjuk, hogy

$$K_{\tau\tau} = \dot{R}\ddot{T} - \dot{T}\ddot{R} - f^{-1}f'\dot{R}^2\dot{T} - \frac{1}{2}f'\dot{T} \quad (5.156)$$

τ szerint deriválva az 5.155 összefüggést, \ddot{T} kiküszöbölhető

$$\ddot{T} = \left(\ddot{R} + \frac{1}{2}f'\right) f^{-2}\dot{R}\dot{T}^{-1} - f^{-1}f'\dot{R}\dot{T} \quad (5.157)$$

amely összefüggést felhasználva

$$K_{\tau\tau} = -f^{-1}\dot{T}^{-1} \left(\ddot{R} + \frac{1}{2}f'\right). \quad (5.158)$$

C. \dot{T} képletének levezetése, avagy az ϵ_t előjel rögzítése

A négyes sebesség normálási feltételéből \dot{T} értéke előjel erejéig meghatározható. Ugyanakkor érezzük, hogy az előjelnek egyértelműnek kell lennie, a \dot{T} függvénynek pedig folytonosnak és differenciálhatónak, tehát az abszolút érték jel valószínű elhagyható a (2.31) képletből. Ahhoz azonban hogy ezt belássuk, nem elegendő a normálási feltétel használata. Az alábbiakban megadjuk a pontos levezetést.

A felületi energia-impulzus tenzor komponensei:

$$S_{ab} = \text{diag}(\sigma, \mathcal{P}R^2, \mathcal{P}R^2 \sin^2 \vartheta) \quad (5.159)$$

$$S^{ab} = \text{diag}(\sigma, \mathcal{P}R^{-2}, \mathcal{P}R^{-2} \sin^{-2} \vartheta) \quad (5.160)$$

ez alapján

$$S^{ab}K_{ab} = \sigma K_{\tau\tau} + \mathcal{P}R^{-2}K_{\vartheta\vartheta} + \mathcal{P}R^{-2} \sin^{-2} \vartheta K_{\varphi\varphi} = \sigma K_{\tau\tau} + 2\mathcal{P}R^{-2}K_{\vartheta\vartheta} \quad (5.161)$$

ahol kihasználtuk, hogy $K_{\varphi\varphi} = \sin^2 \vartheta K_{\vartheta\vartheta}$. Használva az $\{X\} = X|_+ + X|_-$ jelölést és tekintve a az (5.140) egyenlet, az (5.161) alapján írhatjuk, hogy

$$S^{ab}\{K_{ab}\} = \sigma\{K_{\tau\tau}\} + 2\mathcal{P}R^{-2}\{K_{\vartheta\vartheta}\} = 0 \quad (5.162)$$

vagyis

$$\{K_{\tau\tau}\} = -\frac{2\mathcal{P}}{\sigma R} \{f\dot{T}\} \quad (5.163)$$

Behelyettesítve az (5.154) és az (5.158) kifejezéseket, kapjuk a (2.25) és (2.26) egyenleteket a [67] cikkben.

A Lánczos-egyenlet alapján

$$[K_{\tau\tau}] = -8\pi(\sigma + \frac{1}{2}S) = -4\pi(\sigma + 2\mathcal{P}) \quad (5.164)$$

Az (5.163) és az (5.164) alapján pedig írhatjuk, hogy

$$2K_{\tau\tau}^+ = \{K_{\tau\tau}\} + [K_{\tau\tau}] = -\frac{2\mathcal{P}}{\sigma R} \{f\dot{T}\} - 4\pi(\sigma + 2\mathcal{P}) \quad (5.165)$$

$$2K_{\tau\tau}^- = \{K_{\tau\tau}\} - [K_{\tau\tau}] = -\frac{2\mathcal{P}}{\sigma R} \{f\dot{T}\} + 4\pi(\sigma + 2\mathcal{P}) \quad (5.166)$$

Ezután az (5.158) összefüggésből kifejezzük \ddot{R} -ot, mégpedig mindkét határoló téridő mennyiségeit használva, és behelyettesítve az (5.165) és az (5.166) képleteket.

$$\ddot{R} = -\frac{1}{2}f'_+ + \frac{1}{2}f_+\dot{T}_+ \left(\frac{2\mathcal{P}}{\sigma R} \{f\dot{T}\} + 4\pi(\sigma + 2\mathcal{P}) \right) \quad (5.167)$$

$$\ddot{R} = -\frac{1}{2}f'_- + \frac{1}{2}f_-\dot{T}_- \left(\frac{2\mathcal{P}}{\sigma R} \{f\dot{T}\} - 4\pi(\sigma + 2\mathcal{P}) \right) \quad (5.168)$$

ezek az egyenletek megegyeznek a (2.27) és (2.28) egyenletekkel a [67] cikkben. Kihaszználva az f metrikus függvény speciális formáját, miszerint $\frac{1}{2}f'|_{\pm} = M_{\pm}/r^2$, a fenti egyenletek jobb oldalát egyenlővé téve és átrendezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f'_+ - \frac{1}{2}f'_- &= \frac{m_+ - m_-}{R^2} = \\ &= \frac{1}{2}f_+\dot{T}_+ \left(\frac{2\mathcal{P}}{\sigma R} \{f\dot{T}\} + 4\pi(\sigma + 2\mathcal{P}) \right) - \frac{1}{2}f_+\dot{T}_+ \left(\frac{2\mathcal{P}}{\sigma R} \{f\dot{T}\} + 4\pi(\sigma + 2\mathcal{P}) \right) \end{aligned} \quad (5.169)$$

A fenti egyenletbe $\{f\dot{T}\}$ helyére az (5.165) és az (5.166) képletek alapján helyettesítve kapjuk, hogy

$$\{f\dot{T}\} = \frac{m_+ - m_-}{2\pi R^2 \sigma} \quad (5.170)$$

A Lánczos-egyenlet $\tau - \tau$ komponense

$$S_{\tau\tau} = \sigma = -\frac{1}{4\pi R^2} [K_{\tau\tau}] = -\frac{1}{4\pi R} [f\dot{T}] \quad (5.171)$$

vagyis $[f\dot{T}] = -4\pi\sigma R$, amelyet visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$2f_+\dot{T}_+ = \{f\dot{T}\} + [f\dot{T}] = \frac{m_g}{2\pi R^2 \sigma} - 4\pi\sigma R \quad (5.172)$$

$$2f_-\dot{T}_- = \{f\dot{T}\} - [f\dot{T}] = \frac{m_g}{2\pi R^2 \sigma} + 4\pi\sigma R \quad (5.173)$$

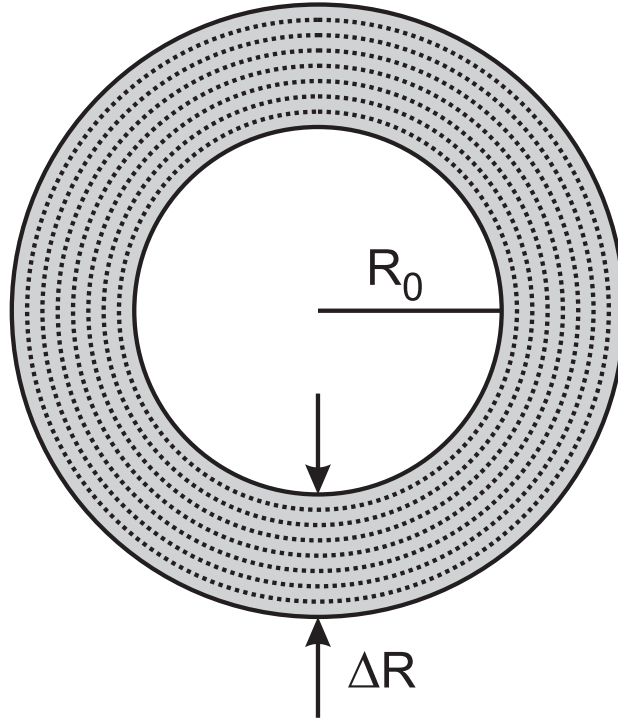
ahol $m_g = m_+ - m_-$. A fenti egyenletekből \dot{T}_{\pm} mennyiségeket kifejezve kapjuk a keresett (2.31) képletet.

D. Virializált réteges gömbhéj modell

Tekintsünk egy ideális gázból álló virializált gömbhéjat, melynek belső sugara R_0 , vastagsága $\Delta R \ll R_0$, lásd a 22. ábrát. A kinetikus gázelmélet szerint

$$p^{(3)}V = \frac{n\mu\overline{v^2}}{3} \quad (5.174)$$

ahol $p^{(3)}$ a nyomás, $V \approx \Delta R(4\pi R_0^2)$ a térfogat, n a részecskék száma, μ egy részecske tömege. A gömbhéj teljes tömege $M_{\text{össz}} = n\mu$.



22. ábra. *Illusztráció a réteges gömbhéj modellhez.* A számításoknál feltesszük, hogy $\Delta R \ll R_0$.

A viriál-tétel szerint a kinetikus és a potenciális energia átlaga közötti összefüggés $2\langle E_{\text{kin}} \rangle = -\langle E_{\text{pot}} \rangle$. Jelen esetben a potenciális energia tisztán gravitációs, amelyet az alábbi integrállal számolhatunk

$$M_{\text{össz}} \overline{v^2} = \int_0^{M_{\text{össz}}} \frac{\tilde{m}}{R_0} d\tilde{m} = \frac{M_{\text{össz}}^2}{2R_0} \quad (5.175)$$

Feltettük, hogy nincs centrális tömeg a középpontban, és minden $d\tilde{m}$ tömeghéj sugarát R_0 -nak vettünk a $\Delta R \ll R_0$ közelítést kihasználva. Ezt visszahelyettesítve az (5.174) egyenletébe a nyomás kifejezhető:

$$p^{(3)} = \frac{M_{\text{össz}}^2}{24\pi R_0^3 \Delta R} \quad (5.176)$$

Most tegyük fel, hogy a fenti rendszert egy réteges héjmodellel szeretnénk közelíteni, melyben N darab egyenletesen elosztott héjat használunk, melyek egymástól való távolsága $\delta R = \Delta R/N$. A héjmodelben a héjak között vákuumot feltételezünk, és nyomás csak tangenciális irányban ébred az infinitezimális vastagságú héjak felületén. A héjmodellben szereplő kétdimenziós tangenciális nyomást $p^{(2)}$ -vel jelöljük. A két nyomás közötti kapcsolatot

az adja, hogy egy adott radiális keresztmetszetre ugyanakkora erőnek kell hatnia mindkét modellben, tehát $p^{(2)} = p^{(3)}\delta R$. Felhasználva, hogy a felületi tömegsűrűség az egyes héjakon

$$\sigma = \frac{M_{\text{össz}}/N}{4\pi R_0^2} \quad (5.177)$$

ahol megint R_0 -al közelítettük minden réteg sugarát, az adódik, hogy lineáris állapot egyenletet feltételezve


$$w = p^{(2)}/\sigma = \frac{M_{\text{össz}}}{6R_0}. \quad (5.178)$$


Érdemes megjegyezni, hogy $w = c_s^2$ egyben a hangsebesség négyzete a felületen.


Irodalomjegyzék

- [1] F. I. COOPERSTOCK és N. ROSEN: *A nonlinear gauge-invariant field theory of leptons*. International Journal of Theoretical Physics **28**, 423 (1989)
- [2] W. B. BONNOR és F. I. COOPERSTOCK: *Does the electron contain negative mass?* Physics Letters A **139**, 442 (1989)
- [3] L. HERRERA és V. VARELA: *Negative energy density and classical electron models*. Physics Letters A **189**, 11 (1996)
- [4] S. RAY és S. BHADRA: *Classical electron model with negative energy density in Einstein–Cartan theory of gravitation*. International Journal of Modern Physics D **13**, 555 (2004)
- [5] C. A. LÓPEZ: *Dynamics of charged bubbles in general relativity and models of particles*. Physical Review D **38**, 3662 (1988)
- [6] K. G. ZLOSHCHASTIEV: *Extended particle models based on hollow singular hypersurfaces in general relativity: Classical and quantum aspects of charged textures*. International Journal of Modern Physics D **8**, 165 (1999)
- [7] V. VARELA: *Neutral perfect fluids and charged thin shells with electromagnetic mass in general relativity*. General Relativity and Gravitation **39**, 267 (2007)
- [8] L. ORTÍZ és JR. M. P. RYAN: *The complete quantum collapse scenario of a 2 + 1 dust shell: Preliminary calculations*. (2007)
- [9] A. CORICHI és a többiek: *Quantum collapse of a small dust shell*. Physical Review D **65**, 064006 (2002)
- [10] A. CHODOS, R. L. JAFFE, K. JOHNSON, C. B. THORN és V. F. WEISSKOPF: *Baryon structure in the bag theory*. Physical Review D **9**, 3471 (1974)
- [11] K. JOHNSON: *The M.I.T. bag model*. Acta Physica Polonica **B6**, 865 (1975)
- [12] K. G. ZLOSHCHASTIEV: *Singular shells of quark-gluon matter*. International Journal of Modern Physics D **8**, 363 (1999)



- [13] J. P. OSTRICKER és J. E. GUNN: *Do pulsars make supernovae?* Astrophysical Journal **164**, L95 (1971)
- [14] L. ZANINETTI: *A law of motion for spherical shells in special relativity.* Advanced Studies in Theoretical Physics **4**, 525 (2010)
- [15] A. ORI: *Inevitability of shell crossing in the gravitational collapse of weakly charged dust spheres.* Physical Review D **44**, 2278 (1991)
- [16] J. FRAUENDIENER és C. KLEIN: *On crossing dust shells.* Journal of Mathematical Physics **36**, 3632 (1995)
- [17] P. SZEKERES és L. ANTHONY: *What is a shell-crossing singularity?* Journal of the Australian Mathematical Society B **41**, 167 (1999)
- [18] A. KRASIŃSKI és K. BOLEJKO: *Avoidance of singularities in spherically symmetric charged dust.* Physical Review D **73**, 124033 (2006)
- [19] D. VICK: *Gravitational collapse of a shell subject to the Casimir force.* Nouvo Cimento B **94**, 54 (1986)
- [20] D. G. BOULWARE: *Hawking radiation and thin shells.* Physical Review D **13**, 2169 (1976)
- [21] K. LAKE: *Thin spherical shells.* Physical Review D **19**, 2847 (1979)
- [22] P. R. BRADY J. LOUKO és E. POISSON: *Stability of a shell around a black hole.* Physical Review D **44**, 1891 (1991)
- [23] C. BARRABÈS és V. P. FROLOV: *How many new worlds are inside a black hole?* Physical Review D **53**, 3215 (1996)
- [24] S. N. ZHANG és Y. LIU: *Observe matter falling into a black hole.* AIP Conference Proceedings **968**, 384 (2008)
- [25] M. SHARIF és G. ABBAS: *Gravitational Collapse: Expanding and Collapsing Regions.* General Relativity and Gravitation, (2010)
- [26] V. H. HAMITY és R. J. GLEISER: *The relativistic dynamics of a thin spherically symmetric radiating shell in the presence of a central body.* Astrophysics and Space Science **58**, 353 (1978)
- [27] N. O. SANTOS Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **216**, 403 (1985)

- [28] F. FAYOS, X. JAÉN, E. LLANTA és J. M. M. SENOVILLA: *Interiors of Vaidya's radiating metric: Gravitational collapse*. Physical Review D **45**, 2732 (1992)
- [29] T. KOIKE és T. MISHIMA *Analytic model with critical behavior in black hole formation*. Physical Review D **51**, 4045 (1995)
- [30] M. VISSER: *Traversable wormholes: Some simple examples*. Physical Review D **39**, 3182 (1989)
- [31] M. VISSER: *Lorentzian wormholes: from Einstein to Hawking*. ISBN 1-56396-394-9 (kemény kötés), ISBN 1-56396-653-0 (puha kötés) (1995) 
- [32] E. POISSON M. VISSER: *Thin-shell wormholes: Linearization stability*. Physical Review D **52**, 7318 (1995)
- [33] F. S. N. LOBO és P. CRAWFORD: *Linearized stability analysis of thin-shell wormholes with a cosmological constant*. Classical and Quantum Gravity **21**, 391 (2004)
- [34] E. F. EIROA és G. E. ROMERO: *Linearized Stability of Charged Thin-Shell Wormholes*. General Relativity and Gravitation **36**, 651 (2004)
- [35] F. S. N. LOBO: *Energy conditions, traversable wormholes and dust shells*. General Relativity and Gravitation **37**, 2023 (2005)
- [36] F. RAHAMAN, M. KALAM és K. A. RAHMAN: *Thin shell wormhole due to dyadosphere of a charged black hole*. arXiv:0806.1391 (2008)
- [37] G. A. S. DIAS és J. P. S. LEMOS: *Thin-shell wormholes in d-dimensional general relativity: Solutions, properties, and stability*. arXiv:1008.3376v1 (2010)
- [38] K. MADEA és H. SATO: *Expansion of a thin shell around a void in expanding Universe*. Progress of Theoretical Physics **70**, 772 (1983)
- [39] K. LAKE és R. PIM: *Development of voids in the thin-wall approximation. I – General characteristics of spherical vacuum voids*. The Astrophysical Journal **298**, 439 (1985)
- [40] S. KHAKSHOURNIA és R. MANSOURI: *Formation of cosmological mass condensation within a FRW universe: exact general relativistic solutions*. Physical Review D **65**, 027302 (2001)

- [41] A. VILENKIN: *Cosmic strings and domain walls*. Physics Reports **121**, 263 (1984)
- [42] S. K. BLAU, E. I. GUENDELMAN és A. H. GUTH: *Dynamics of false vacuum-bubbles*. Physical Review D **36**, 2919 (1987)
- [43] V. A. BEREZIN és V. A. KUZMIN: *Dynamics of bubbles in general relativity*. Physical Review D **35**, 1747 (1987)
- [44] E. FARHI, A. H. GUTH és J. GUVEN: *Is it possible to create a universe in the laboratory by quantum tunneling?* Nuclear Physics B **339**, 417 (1990)
- [45] N. SAKAI és K. MAEDA: *Junction conditions of Friedmann–Robertson–Walker space-times*. Physical Review D **50**, 5425 (1994)
- [46] A. AGUIRRE és M. C. JOHNSON: *Dynamics and instability of false vacuum bubbles*. Physical Review D **72**, 103525 (2005)
- [47] S. ANSOLDI és L. SINDONI: *Shell-mediated tunnelling between (anti-)de Sitter vacua*. Physical Review D **76**, 064020 (2007)
- [48] R. PEASE: *Brane new world*. Nature **411**, 986 (2001)
- [49] L. ANCHORDOQUI és a többiek: *Brane worlds, string cosmology, and AdS/CFT*.
- [50] D. JENNINGS és a többiek: *Bulk black holes radiating in non- Z_2 brane-world spacetimes*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 04 (2005) 013
- [51] L. Á. GERGELY: *Friedmann branes with variable tension*. Physical Review D **78**, 084006 (2008)
- [52] R. M. WALD: *General relativity*. ISBN 0-226-87033-2 (1984) 
- [53] W. ISRAEL: *Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity*. Nouvo Cimento B **44** 1 (1966); sajtóhiba: Nouvo Cimento B **48**, 463 (1967)
- [54] N. SEN: *Über die grenzbedingungen des schwerefelds an unstetig keistflächen*. Annalen der Physik (Leipzig) **73**, 365 (1924)

- [55] K. LÁNCZOS: *Ein vereinfachendes koordinatensystem für Einsteinschen gravitationsgleichungen*. Phys. Zeit **23**, 539 (1922); fordítás: W. R. DAVIS és a többiek: *Cornelius Lanczos collected published papers with commentaries*. ISBN 0-929493-01-X (1998)
- [56] K. LÁNCZOS: *Flächenhafte verteilung der materie in der Einsteinschen gravitationstheorie*. Annalen der Physik (Leipzig) **74**, 518 (1924); fordítás: W. R. DAVIS és a többiek: *Cornelius Lanczos collected published papers with commentaries*. ISBN 0-929493-01-X (1998)
- [57] G. DARMOIS: *Les équations de la gravitation einsteinienne*. Mémorial des Sciences Mathématiques XXV, Gauthier-Villars, Paris (1927)
- [58] S. O'BRIEN és J. L. SYNGE: *Jump conditions at discontinuities in general relativity*. Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, ser. A, no. 9 (1952)
- [59] A. LICHNEROWICZ: *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*. Paris (1955) 
- [60] A. H. TAUB: *Singular hypersurfaces in general relativity*. Illinois Journal of Mathematics **1**, 370 (1957)
- [61] G. DAUTCOURT: *Über Flächenbelegungen in der allgemeinen Relativitätstheorie*. Mathematische Nachrichten **27**, 277 (1964)
- [62] D. NÚÑEZ, H. P. OLIVEIRA és J. SALIM: *Dynamics and collision of massive shells in curved backgrounds*. Classical and Quantum Gravity **10**, 1117 (1993)
- [63] D. S. GOLDWIRTH és J. KATZ: *A comment on junction and energy conditions in thin shells*. Classical and Quantum Gravity **12**, 769 (1995)
- [64] A. PAPAPETROU és A. HAMOUI: *Couches simples de matie're en relativité générale*. Annales de l'institut Henri Poincaré A **9**, 179 (1968)
- [65] J. ISPER és P. SIKIVIE: *Gravitationally repulsive domain wall*. Physical Review D **30**, 712 (1984)
- [66] D. NÚÑEZ: *Oscillating shells: a model for a variable cosmic object*. The Astrophysical Journal **482**, 963 (1997)
- [67] K. NAKAO, D. IDA és N. SUGIURA: *Crossing of spherical massive shells in vacuum space-time*. Progress of Theoretical Physics **101**, 1 (1999)

- [68] S. M. C. V. GONÇALVES: *Relativistic shells: Dynamics, horizons, and shell crossing*. Physical Review D **66**, 084021 (2002)
- [69] V. DE LA CRUZ és W. ISRAEL *Nouvo Cimento A* **51**, 744 (1967)
- [70] K. KUCHAR *Czechoslovak Journal of Physics B* **18**, 435 (1968)
- [71] J. E. CHASE: *Gravitational instability and collapse of charged fluid shells*. *Nouvo Cimento B* **67**, 136 (1970)
- [72] A. H. TAUB: *Space-times with distribution valued curvature tensors*. *Journal of Mathematical Physics* **21**, 1423 (1980)
- [73] M. KHORRAMI és R. MANSOURI: *Spherically symmetric thin walls*. *Physical Review D* **44**, 557 (1990)
- [74] R. MANSOURI és M. KHORRAMI: *The equivalence of Darmois-Israel- and distributional-method for thin shells in general relativity*. *Journal of Mathematical Physics* **37**, 5672 (1996)
- [75] K. NOZARI és R. MANSOURI: *The methods of gluing manifolds in general relativity*. *Journal of Mathematical Physics* **43**, 1519 (2002)
- [76] P. HÁJÍČEK és J. AND BIČÁK: *Gauge-invariant Hamiltonian formalism for spherically symmetric gravitating shells*. *Physical Review D* **56**, 4706 (1997)
- [77] S. ANSOLDI, A. AURILIA, R. BALBINOT és E. SPALLUCI: *Classical and quantum shell dynamics, and vacuum decay*. *Classical and Quantum Gravity* **14**, 2727 (1997)
- [78] V. D. GLADUSH: *On the variational principle for dust shells in General Relativity*. Preprint: gr-qc/000107 (2001)
- [79] J. CRISÓSTOMO és R. OLEA: *Hamiltonian Treatment of the Gravitational Collapse of Thin Shells*. *Physical Review D* **69**, 104023 (2004)
- [80] J. KIJOWSKI és E. CZUCHRY: *Dynamics of a self-gravitating shell of matter*. *Physical Review D* **72**, 084015 (2005)
- [81] J. KIJOWSKI, G. MAGLI és D. MALAFARINA: *New derivation of the variational principle for the dynamics of a gravitating spherical shell*. *Physical Review D* **74**, 084017 (2006)
- [82] J. S. HOYE, I. LINERUD, K. OLAUSSEN és R. SOLLIE: *Evolution of Spherical Shells in General Relativity*. *Physica Scripta* **31**, 97 (1985)

- [83] S. KHAKSHOURNIA és R. MANSOURI: *Dynamics of general relativistic spherically symmetric dust thick shells*. General Relativity and Gravitation **34**, 1847 (2002)
- [84] U. KIRCHNER: *A new approach to spherically symmetric junction surfaces and the matching of FLRW regions*. Classical and Quantum Gravity **21**, 3845 (2004)
- [85] J. S. READ, B. D. LACKEY, B. J. OWEN és J. L. FRIEDMAN: *Constraints on a phenomenologically parametrized neutron-star equation of state*. Physical Review D **79**, 124032 (2008)
- [86] P. CSIZMADIA és I. RÁCZ: *Gravitational collapse and topology change in spherically symmetric dynamical systems*. Classical and Quantum Gravity **27**, 015001 (2010)
- [87] A. EID és J. LANGER: *On the crossing of thin shells*. Czechoslovak Journal of Physics **50**, 1081 (2000)
- [88] K. LAKE és R. C. ROEDER: *Some remarks on surfaces of discontinuity in general relativity*. Physical Review D **17**, 1935 (1978) 
- [89] S. W. HAWKING és G. F. R. ELLIS: *The large scale structure of space-time*. ISBN 0-521-09906-4 (1973)
- [90] I. RÁCZ: *On the topology of untrapped surfaces*. Classical and Quantum Gravity **26**, 055017 (2009)
- [91] D. LYNDEN-BELL, J. KATZ és I. H. REDMOUNT: *Sheet universes and the shapes of Friedmann universes*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **239**, 201 (1989)
- [92] J. T. JEBSEN: *Über die allgemeinen kugelsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen im vakuum*. Ark. Mat. Ast. Fys. (Stockholm) **15**, nr. 18. (1921)
- [93] G. D. BIRKHOFF: *Relativity and Modern Physics*. LCCN 23008297, 253. oldal (1923) 
- [94] A. CELOTTI, J. C. MILLER és D. W. SCIAMA: *Astrophysical evidence for the existence of black holes* Classical and Quantum Gravity **16**, A3 (1999)

- [95] J. KORMENDY: *The Stellar-Dynamical Search for Supermassive Black Holes in Galactic Nuclei*. Carnegie Observatories Astrophysics Series **1** (2003)
- [96] F. MELIA: *Odd company*. Nature **437**, 1105 (2005)
- [97] M. A. ABRAMOWICZ, W. KLUŻNIAK és J. P. LASOTA: *No observational proof of the black-hole event-horizon*. Astronomy & Astrophysics **396** L31 (2002)
- [98] N. D. BIRRELL és P. C. W. DAVIES: *Quantum fields in curved space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics (1982)
- [99] R. M. WALD: *The Thermodynamics of Black Holes*. Living Reviews in Relativity **4** (2001)
- [100] M. VISSER: *Black holes in general relativity*. Preprint: gr-qc/0901.4365 (2009)
- [101] V. P. FROLOV, M. A. MARKOV és V. F. MUKHANOV: *Through a black hole into a new universe?* Physics Letters B **216**, 272 (1988)
- [102] R. BALBINOT és E. POISSON: *Stability of the Schwarzschild–de Sitter model*. Physical Review D **41**, 395 (1990)
- [103] P. O. MAZUR és E. MOTTOLA: *Gravitational vacuum condensate stars*. Preprint: gr-qc/0109035 (2001)
- [104] C. CATTOEN, T. FABER és M. VISSER: *Gravastars must have anisotropic pressures* Classical and Quantum Gravity **22**, 4189 (2005)
- [105] M. VISSER és D. L. WILTSHIRE: *Stable gravastars - an alternative to black holes?* Classical and Quantum Gravity **21**, 1135 (2004)
- [106] I. DYMNIKOVA: *Vacuum nonsingular black hole*. General Relativity and Gravitation **24**, 235 (1992)
- [107] I. DYMNIKOVA: *The cosmological term as a source of mass*. Classical and Quantum Gravity **19**, 725 (2002)
- [108] A. DEBENEDICTIS és mások: *Gravastar Solutions with Continuous Pressures and Equation of State*. Classical and Quantum Gravity **23**, 2303 (2006)
- [109] C. B. M. H. CHIRENTI és L. REZZOLLA: *How to tell a gravastar from a black hole*. Classical and Quantum Gravity **24**, 4191 (2007)

- [110] M. VOLONTERI, P. MADAU, E. QUATAERT és M. REES: *The distribution and cosmic evolution of massive black hole spins*. Astrophysical Journal **620**, 69 (2005)
- [111] J. WANG, Y. CHEN, L. C. HO és R. J. MCLURE: *Evidence for Rapidly Spinning Black Holes in Quasars*. Astrophysical Journal **642**, L111 (2006)
- [112] F. S. N. LOBO: *Stable dark energy stars*. Preprint: arXiv.org: gr-qc/0508115 (2006)
- [113] M. E. GÁSPÁR és I. RÁCZ: *Probing the stability of gravastars by dropping dust shells onto them*. Classical and Quantum Gravity **27**, 185004 (2010)
- [114] M. E. GÁSPÁR és I. RÁCZ: *On the dynamics of relativistic multi-layer spherical shell systems*. Classical and Quantum Gravity **28**, 085005 (2010)
- [115] J. P. KRISCH és E. N. GLASS: *Thin shell dynamics and equations of state*. Physical Review D **78**, 044003 (2008)
- [116] J. P. KRISCH és E. N. GLASS: *Collapsing layers on Schwarzschild–Lemaître geodesics*. Physical Review D **76**, 104006 (2007)
- [117] D. LANGLOIS és K. MAEDA K, D. WANDS: *Conservation laws for collisions of branes and shells in general relativity*. Physical Review Letters **88**, 181301 (2002)
- [118] M. VISSER: *Quantum wormholes*. Physical Review D **43**, 402 (1991)
- [119] A. D. DOLGOV és I. B. KHRIPLOVICH: *Properties of the quantized gravitating dust shell*. Physics Letters B **400**, 12 (1997)
- [120] P. MUSGRAVE és K. LAKE: *Junctions and thin shells in general relativity using computer algebra: I. The Darmois–Israel formalism*. Classical and Quantum Gravity **13**, 1885 (2010)
- [121] J. LANGER és M. ŽOFKA: *Nearly everywhere flat spaces*. Czechoslovak Journal of Physics **52**, 669 (2002)
- [122] J. KATZ és D. LYNDEN-BELL: *Tension shells and tension stars*. Classical and Quantum Gravity **8**, 2231 (1991)

- [123] P. S. FLORIDES: *A new interior Schwarzschild solution*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A **337**, 529 (1974)
- [124] H. A. BUCHDAHL: *General relativistic fluid spheres*. Physical Review **116**, 1027 (1959)
- [125] H. ANDRÉASSON: *Sharp bounds on $2m/r$ of general spherically symmetric static objects*. Preprint: gr-qc/0702137
- [126] K. G. ZLOSHCHASTIEV: *Barotropic thin shells with linear EOS as models of stars and circumstellar shells in general relativity*. International Journal of Modern Physics D **8**, 549 (1999)
- [127] P. KARAGEORGIS és J. G. STALKER: *Sharp bounds on $2m/r$ for static spherical objects*. Classical and Quantum Gravity **25**, 195021 (2007)
- [128] H. BONDI: *Massive spheres in general relativity*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A **282**, 303 (1964)